

グラフ上の走化性方程式の時間大域解の構成

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報数理学専攻
岩崎悟 (Satoru IWASAKI)

概要

本研究では、細胞性粘菌の凝集現象を記述する方程式系である走化性方程式を、一次元区間が分岐した形のグラフ上の問題に拡張した問題を取り扱う。本稿ではグラフ上の走化性方程式を適当な Hilbert 空間内の発展方程式として定式化して、一意な時間大域解が構成可能であることを紹介する。

1 はじめに

本稿では、細胞性粘菌の凝集現象を表現する数理モデルである走化性方程式をグラフ上で考えた問題の解析結果を紹介する。具体的には（第2章で定める記号を用いて）以下のグラフ $\mathcal{G} = \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$ 上の問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] & \text{in } I_i \times (0, \infty), \quad I_i \in \mathcal{E}, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} - \beta v_i + \gamma u_i & \text{in } I_i \times (0, \infty), \quad I_i \in \mathcal{E}, \\ u_i(x_i, 0) = u_i^0(x_i) \geq 0, \quad v_i(x_i, 0) = v_i^0(x_i) \geq 0 & \text{in } I_i, \quad I_i \in \mathcal{E}, \end{cases} \quad (1.1)$$

に Kirchhoff 条件：各頂点 $N_j \in \mathcal{N}$ と任意の時間 $t > 0$ において、

$$\text{there exists a } u(N_j, t) \text{ such that } u_i(N_j, t) = u(N_j, t) \text{ for all } I_i \in o(N_j) \cup \omega(N_j), \quad (1.2)$$

$$\text{there exists a } v(N_j, t) \text{ such that } v_i(N_j, t) = v(N_j, t) \text{ for all } I_i \in o(N_j) \cup \omega(N_j), \quad (1.3)$$

かつ

$$\frac{\partial u}{\partial n}(N_j, t) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial v}{\partial n}(N_j, t) = 0, \quad (1.4)$$

を課した問題を考える。初期条件 $\{u_i^0(x_i)\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ は以下を満たすとする。

$$\sum_{I_i \in \mathcal{E}} \int_{I_i} u_i^0 dx_i = l. \quad (1.5)$$

問題 (1.1) – (1.5) において、未知関数 $u_i = u_i(x_i, t)$ と $v_i = v_i(x_i, t)$ はそれぞれ、辺 $I_i \in \mathcal{E}$ の座標 $x_i \in I_i$ および時刻 $t \in (0, \infty)$ における細胞性粘菌の濃度と誘引化学物質の濃度を表している。加えて $u = \{u_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ と $v = \{v_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ は各辺上の未知関数の集合である。条件 (1.2) – (1.4) は u_i と v_i が頂点 $N_j \in \mathcal{N}$ を通してお互いにどのように相互作用を及ぼすかという接合条件を表している。具体的には、条件 (1.2) と (1.3) は頂点 $N_j \in \mathcal{N}$ 上で濃度が連続的につながっていることを意味しており、条件 (1.4) は頂点 N_j 上で物質の生成・消滅がなく、流入量と流出量が同じとなることを意味し

ている．初期条件は非負条件 $u_i^0(x_i) \geq 0$ と $v_i^0(x_i) \geq 0$ を仮定する．条件 (1.5) は細胞性粘菌のグラフ \mathcal{G} 上での総量が $l > 0$ であることを意味している．最後に，係数 α, β, γ は正の定数とする．

問題 (1.1) – (1.5) はグラフ上の偏微分方程式である．グラフ上の偏微分方程式は数学的には各辺上での偏微分方程式と各頂点上での接合条件の連立した問題となる（図 1 参照）．グラフ上の偏微分方程式は Lumer [1] の研究を起点に多くの研究が行われており，Below [2] による Strum-Liouville 固有値問題の研究や，Yanagida [3] による反応拡散方程式の定常状態の安定性研究などがある．一方でグラフ上の偏微分方程式は応用としても広く使われており，カーボンナノチューブの研究 [4]，フォトニック結晶の研究 [5]，梁のネットワークの研究 [6] などに活用されている．

一方で，問題 (1.1) – (1.5) は走化性方程式の一つでもある．Keller と Segel [7] が走化性現象を移流反応拡散方程式で定式化して以降，それに類する問題は多くの研究者により研究されている．本稿で扱う問題 (1.1) – (1.5) に関する以下の問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla \cdot [u \nabla v] & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \Delta v + \beta u - \gamma v & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

は Childress と Percus [8] により初めて研究された．ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, は十分に滑らかな境界をもつ有界領域であり，(1.6) の解の振る舞いは空間次元 n により大きく異なる．例えば初期値と時間大域解の存在の関係性については以下の事実が知られている． $n = 1$ のとき，Osaki と Yagi [9] は任意の初期値 $u_0(x)$ に対して (1.6) の時間大域解が存在することを示した． $n = 2$ のとき，Nagai と Senba と Yoshida [10] は初期値 $u_0(x)$ の総量 $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ が十分に小さいときに時間大域解が存在することを示し，一方で Herrero と Velázquez [11] は $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ が十分に大きいときに解は有限時間で爆発することを示した． $n = 3$ とき，Winkler [12] は初期値 $u_0(x)$ の総量 $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ をいくら小さくとっても，解が有限時間で爆発するような初期値の形状があることを示した．一方で，Camilli と Corrias [13] はグラフ上の問題を考え（すなわち問題 (1.1) – (1.5) である），任意の初期値に対して積分形の時間大域解の存在を示した．

本稿では問題 (1.1) – (1.5) を適当な Hilbert 空間内の発展方程式として定式化して，その厳密解（すなわち Hilbert 空間に値をとる時間変数関数で，時間微分可能なもの）が構成可能であることを紹介する．時間局所解の構成のために半線形抽象発展方程式の理論 [14, Theorem 4.4] を用いるが，

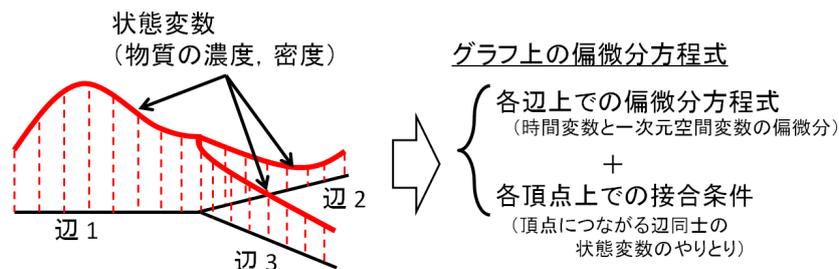


図 1 グラフ上の偏微分方程式

今回の場合にはグラフ上の微分作用素を角域作用素として定式化して、その分数べきを考える必要がある。グラフ上の微分作用素の角域作用素としての定式化とその分数べきの特徴づけに関しては [15] に示しているが、今回は紙面の都合上殆ど触れられないことはご容赦いただきたい。

2 グラフ上の偏微分方程式の定式化に用いる記号の紹介

本章ではグラフ上の偏微分方程式の定式化に必要な記号の定義を行う。

2.1 グラフ $\mathcal{G} = \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$ の定義

空間 \mathbb{R}^3 内の有限個の点の集合を $\mathcal{N} = \{N_j\}_j$ とし、各 $N_j \in \mathcal{N}$ を頂点と呼ぶ。頂点の集合 $\mathcal{N} = \{N_j\}_j$ の 2 頂点を結ぶ線分 I_i を辺と呼び、その集合を $\mathcal{E} = \{I_i\}_i$ とする。各頂点は、少なくとも 1 つの辺とつながっており、辺同士は頂点以外では交わらないとする。このとき、 $\mathcal{G} = \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$ をグラフと呼ぶ。

続いて、辺 $I_i \in \mathcal{E}$ の方向を定義する。各辺 I_i にはユークリッド距離に基づく長さ $l_i > 0$ が対応づくので、各辺 I_i を开区間 $(0, l_i)$ と対応づけることができる。そこで、0 に対応づけられる頂点を I_i の始点（これを $o(I_i) \in \mathcal{N}$ と書く）、 l_i に対応づけられる頂点を I_i の終点（これを $\omega(I_i) \in \mathcal{N}$ と書く）と定義する。加えて、各頂点 $N_j \in \mathcal{N}$ に対して、 $o(N_j)$ と $\omega(N_j)$ を \mathcal{E} の部分集合で、

$$o(N_j) = \{I_i \in \mathcal{E}; o(I_i) = N_j\} \quad \text{and} \quad \omega(N_j) = \{I_i \in \mathcal{E}; \omega(I_i) = N_j\},$$

と定義する。すなわち、 $o(N_j)$ は N_j を始点とする辺の集合であり、 $\omega(N_j)$ は N_j を終点とする辺の集合である。このとき $o(N_j) \cup \omega(N_j)$ は N_j につながる辺をすべて集めた集合となる。

2.2 グラフ \mathcal{G} 上の関数および関数空間

グラフ $\mathcal{G} = \{\mathcal{E}, \mathcal{N}\}$ が与えられたとして、グラフ上の関数および関数空間を考える。

各辺 $I_i \in \mathcal{E}$ 上の関数 $f_i : I_i \rightarrow \mathbb{C}$ の集合 $\{f_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ を考え、 $\{f_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ をグラフ \mathcal{G} 上の関数と呼ぶ。以下では、記号の簡単のために $\{f_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ を $\{f_i\}$ と表記し、さらに混乱が生じなければ f と表記する。加えて、 $\{1\}$ は I_i 上で恒等的に 1 である関数の集合として、これも簡単に 1 と表記する。

ここで f を \mathcal{G} 上の関数とする（つまり $f = \{f_i\} = \{f_i\}_{I_i \in \mathcal{E}}$ である）。各頂点 $N_j \in \mathcal{N}$ において、 $I_i \in o(N_j)$ ならば $f_i(N_j) = f_i(0)$ とおき、 $I_i \in \omega(N_j)$ ならば $f_i(N_j) = f_i(l_i)$ とおく（図 2 参照）。加えて、 N_j における f_i の外向き微分に対応する

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial n}(N_j) &= - \lim_{\Delta x_i \rightarrow +0} \frac{f_i(\Delta x_i) - f_i(0)}{\Delta x_i} = - \frac{df_i}{dx_i}(0) \quad \text{if } I_i \in o(N_j), \\ \frac{\partial f_i}{\partial n}(N_j) &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow +0} \frac{f_i(l_i) - f_i(l_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i} = \frac{df_i}{dx_i}(l_i) \quad \text{if } I_i \in \omega(N_j) \end{aligned}$$

を考え、さらに以下のように定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial n}(N_j) = \sum_{I_i \in o(N_j) \cup \omega(N_j)} \frac{\partial f_i}{\partial n}(N_j).$$

f と g を \mathcal{G} 上の関数として、 $\alpha \in \mathbb{C}$ とする。このとき、演算を以下のように定義する。

$$f + g = \{f_i + g_i\}, \quad \alpha f = \{\alpha f_i\}, \quad \bar{f} = \{\bar{f}_i\} \quad \text{and} \quad fg = \{f_i g_i\}.$$

また、以下では各辺 I_i 上の関数の集合による Banach 空間 X_i の直積空間 $\prod_{I_i \in \mathcal{E}} X_i$ を考えることが多いため、混乱がなければ $\prod X_i$ と表記する。

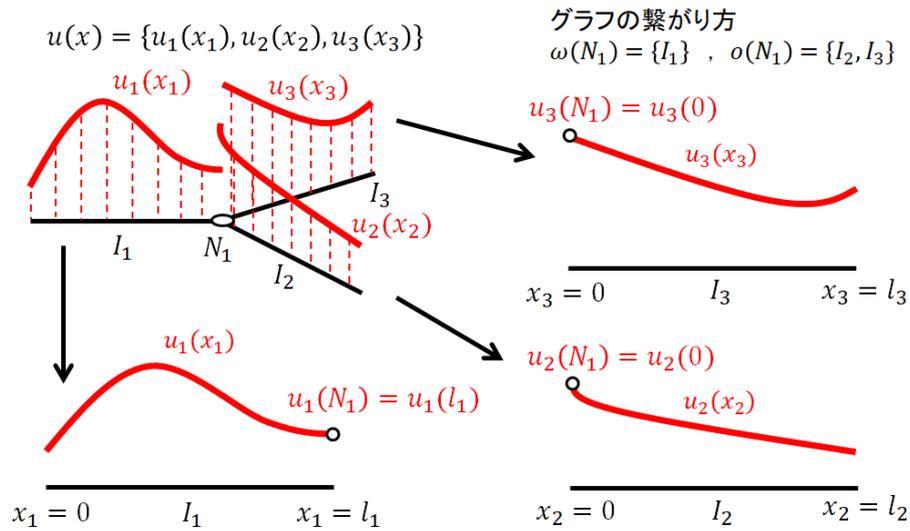


図2 グラフ上の関数の頂点上での値

2.2.1 L_p 空間と連続関数空間

各 $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $L_p(\mathcal{G})$ を $\prod L_p(I_i)$ と定義して, そのノルムを $\|f\|_{L_p(\mathcal{G})} = (\sum_{I_i \in \mathcal{E}} \|f_i\|_{L_p(I_i)}^p)^{1/p}$ で定める. 特に $L_2(\mathcal{G})$ は Hilbert 空間となり, その内積は $(f, g)_{L_2(\mathcal{G})} = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} (f_i, g_i)_{L_2(I_i)}$ で定める.

グラフ \mathcal{G} の連続関数の空間を

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \left\{ f \in \prod \mathcal{C}(\bar{I}_i); \text{ for each } N_j \in \mathcal{N}, \text{ there exists a } f(N_j) \in \mathbb{C} \text{ such that } f_i(N_j) = f(N_j) \text{ for all } I_i \in o(N_j) \cup \omega(N_j) \right\},$$

と定義して, そのノルムを $\|f\|_{\mathcal{C}(\mathcal{G})} = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} \|f_i\|_{\mathcal{C}(\bar{I}_i)}$ とする. つまり, $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ とは, 各辺上の連続関数のただの直積空間ではなく, 各頂点上で値が連続につながっている空間を表す. 加えて, Kirchhoff 条件を満たす関数空間として,

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{G}) = \left\{ f \in \prod \mathcal{C}^1(\bar{I}_i); f \in \mathcal{C}(\mathcal{G}) \text{ and } \frac{\partial f}{\partial n}(N_j) = 0 \text{ for all } N_j \in \mathcal{N} \right\}$$

と定め, そのノルムを $\|f\|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{G})} = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} \|f_i\|_{\mathcal{C}^1(\bar{I}_i)}$ とする.

記号の簡単化のため, $f \in L_1(\mathcal{G})$ に対して,

$$\int_{\mathcal{G}} f \, dx = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} \int_{I_i} f_i \, dx_i$$

と定義する. このように定義すると, 以下のように表現できる.

$$(f, g)_{L_2(\mathcal{G})} = \int_{\mathcal{G}} f \bar{g} \, dx \text{ for } f, g \in L_2(\mathcal{G}).$$

2.2.2 Sobolev 空間

指数 $k = 1, 2, 3$ に対して, 各辺 I_i 上の Sobolev 空間を $H^k(I_i)$ とする. ここで, D_i を I_i 上の超関数の意味での微分作用素として, D を以下の作用素とする.

$$D : f = \{f_i\} \mapsto Df = \{D_i f_i\}.$$

埋め込み定理 $H^1(I_i) \subset C(\bar{I}_i)$ と $H^2(I_i) \subset C^1(\bar{I}_i)$ から, $\prod H^1(I_i)$ には頂点上への値の制限 (すなわちトレース作用素) が有界線形作用素として意味を持ち, $\prod H^2(I_i)$ には導関数の頂点上への値の制限までが有界線形作用素として意味を持つ. そこで, $H^1(\mathcal{G}) = C(\mathcal{G}) \cap \prod H^1(I_i)$ と $H^2(\mathcal{G}) = C^1(\mathcal{G}) \cap \prod H^2(I_i)$ 定義する. 指数 $k = 1, 2$ に対して, $H^k(\mathcal{G})$ は $\prod H^k(I_i)$ の閉部分空間となるため, $\prod H^k(I_i)$ の内積により Hilbert 空間となる. さらに,

$$H^3(\mathcal{G}) = \left\{ f \in \prod H^3(I_i); f \in H^2(\mathcal{G}) \text{ and } D^2 f \in H^1(\mathcal{G}) \right\}$$

と定めると, この空間も $\prod H^3(I_i)$ の内積により Hilbert 空間となる.

以下の関係式はよく使用するので Lemma として示しておく. 証明においては, Kirchhoff 条件により部分積分したときに現れる頂点上での値がきれいに消滅すること重要である.

Lemma 2.1. 以下の関係式が成り立つ.

$$(Du, Dv)_{L_2(\mathcal{G})} = -(D^2 u, v)_{L_2(\mathcal{G})} \text{ for } u \in H^2(\mathcal{G}) \text{ and } v \in H^1(\mathcal{G}). \quad (2.1)$$

Proof. 部分積分から

$$\int_{\mathcal{G}} Du \overline{Dv} \, dx = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} \left[[D_i u_i] \overline{v_i} \right]_{x_i=0}^{x_i=l_i} - \int_{\mathcal{G}} [D^2 u] \overline{v} \, dx.$$

ここで $u \in H^2(\mathcal{G})$ と $v \in H^1(\mathcal{G})$ から,

$$\sum_{I_i \in \mathcal{E}} \left[[D_i u_i] \overline{v_i} \right]_{x_i=0}^{x_i=l_i} = \sum_{N_j \in \mathcal{N}} \overline{v(N_j)} \frac{\partial u}{\partial n}(N_j) = 0$$

と計算できる. □

3 時間局所解の構成

問題 (1.1) – (1.5) の時間局所解を構成する. そのために, 問題 (1.1) – (1.5) を半線形抽象発展方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

に定式化する. ここで, 基礎空間は $X = L_2(\mathcal{G}) \times H^1(\mathcal{G})$ として, X には,

$$(U, \tilde{U})_X = (u, \tilde{u})_{L_2(\mathcal{G})} + (v, \tilde{v})_{H^1(\mathcal{G})}, \quad U = {}^t(u, v), \tilde{U} = {}^t(\tilde{u}, \tilde{v}) \in X$$

という内積を定める. 基礎空間 X を上述のようにとるメリットは, 非線形項 $-D[uDv]$ を発展方程式の枠組みにおいて低階の項として処理できることである. その結果, 準線形の問題である (1.1) – (1.5) を半線形抽象発展方程式 (3.1) に定式化することができる.

角域作用素 $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ は $A = \text{diag}\{A_1, A_2\}$ で定義され, $A_1 = -D^2 + 1$ は $L_2(\mathcal{G})$ 内の角域作用素, かつ $A_2 = -\alpha D^2 + \beta$ は $H^1(\mathcal{G})$ 内の角域作用素である. グラフ上の微分作用素の角域作用素の定義域に関する定理 [15, Theorem 4.1] から, A の定義域は

$$\mathcal{D}(A) = H^2(\mathcal{G}) \times H^3(\mathcal{G}) \quad (3.2)$$

であり、かつ以下のノルム同値を満たす。

$$\|U\|_{\mathcal{D}(A)} = \|u\|_{H^2(\mathcal{G})} + \|v\|_{H^3(\mathcal{G})} \quad \text{for } U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A).$$

続いて角域作用素の分数べきを考えるため、指数が分数の Sobolev 空間 $H^s(I_i)$ などが必要となるが、その定義は紙面の都合上ここでは述べられない。グラフ上の微分作用素の角域作用素の分数べきの定義域に関する定理 [15, Theorem 5.1] から、 A の分数べき A^η の定義域は

$$\mathcal{D}(A^\eta) = H^{2\eta}(\mathcal{G}) \times H^{2\eta+1}(\mathcal{G}) \quad \text{for } 3/4 < \eta \leq 1 \quad (3.3)$$

となり、以下のノルム同値

$$\|U\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} = \|u\|_{H^{2\eta}(\mathcal{G})} + \|v\|_{H^{2\eta+1}(\mathcal{G})} \quad \text{for } U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A^\eta)$$

がなりたつ。以下では η を $3/4 < \eta \leq 1$ を満たすように固定する。

そして非線形作用素 $F: \mathcal{D}(A^\eta) \rightarrow X$ を以下のように定める。

$$F(U) = {}^t(u - D[uDv], \gamma u) \quad \text{for } U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A^\eta).$$

最後に、初期値の空間を以下のように定義する。

$$\mathcal{K} = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X; \begin{array}{l} 0 \leq u \text{ for a.e. } \mathcal{G} \text{ and } 0 \leq v \text{ for } \mathcal{G}, \\ \int_{\mathcal{G}} u \, dx = l \end{array} \right\}.$$

時間局所解の構成のために、半線形抽象発展方程式の理論 [14, Theorem 4.4] を用いる。そのためには、非線形作用素 $F(U)$ の以下の形の Lipschitz 条件を確認することが重要となる。

Proposition 3.1. 非線形作用素 $F(U)$ は、 $U, \tilde{U} \in \mathcal{D}(A^\eta)$ に対して以下の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} & \|F(U) - F(\tilde{U})\|_X \\ & \leq C \left[(1 + \|U\|_X + \|\tilde{U}\|_X) \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} + (\|U\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{D}(A^\eta)}) \|U - \tilde{U}\|_X \right]. \end{aligned}$$

Proof. 記号を $U = {}^t(u, v), \tilde{U} = {}^t(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{D}(A^\eta)$ とする。このとき

$$\|F(U) - F(\tilde{U})\|_X \leq \|u - \tilde{u}\|_{L_2(\mathcal{G})} + \|D[uDv] - D[\tilde{u}D\tilde{v}]\|_{L_2(\mathcal{G})} + \gamma \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\mathcal{G})},$$

となるので、

$$\begin{aligned} & \|D[uDv] - D[\tilde{u}D\tilde{v}]\|_{L_2(\mathcal{G})} \\ & \leq C \left[(\|U\|_X + \|\tilde{U}\|_X) \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} + (\|U\|_{\mathcal{D}(A^\eta)} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{D}(A^\eta)}) \|U - \tilde{U}\|_X \right]. \quad (3.4) \end{aligned}$$

を示せば十分である。これは、連続な埋め込み $H^s(I_i) \subset C(\bar{I}_i)$, $s > 1/2$, から証明できる。 \square

以上の Lipschitz 条件から (3.1) の一意な時間局所解の存在が証明できる。

Theorem 3.1. 任意の初期値 $U_0 \in \mathcal{K}$ に対して、(3.1) の一意な時間局所解 $U = {}^t(u, v)$ が以下の関数空間に存在する。

$$0 \leq U \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; X) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}); X). \quad (3.5)$$

ここで T_{U_0} は $\|U_0\|_X$ に依存する。

Proof. 半線形抽象発展方程式の時間局所解の存在定理 [14, Theorem 4.4] より, 任意の初期値 $U_0 \in \mathcal{K}$ に対して, (3.1) は一意な時間局所解を以下の関数空間にもつ.

$$U \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; X) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; X).$$

半線形抽象発展方程式の時間局所解の存在定理は複素数に値を取る関数空間で証明されているが, 今回の $U(t)$ は実数値であることがわかる. 実際, $U(t)$ の複素共役 $\overline{U(t)}$ も, 同じ初期値 U_0 をもつ (3.1) の時間局所解である (初期値と方程式の係数はすべて実数であることに注意する). したがって, 解の一意性から $\overline{U(t)} = U(t)$ を満たし $U(t)$ は実数値となることがわかる. 解の非負性は truncation method を用いて [9, Section 3] と同様に証明することができる. \square

4 時間大域解の構成

本章では, 前章で存在を示した時間局所解に対してアприオリ評価を示すことにより, 時間局所解を時間大域解まで延長することが可能であることを示す.

以下では $U = {}^t(u, v)$ を (3.1) の任意の時間局所解で, 以下の関数空間にあるものとする.

$$\begin{cases} 0 \leq u \in \mathcal{C}((0, T_U]; H^2(\mathcal{G})) \cap \mathcal{C}([0, T_U]; L_2(\mathcal{G})) \cap \mathcal{C}^1((0, T_U]; L_2(\mathcal{G})), \\ 0 \leq v \in \mathcal{C}((0, T_U]; H^3(\mathcal{G})) \cap \mathcal{C}([0, T_U]; H^1(\mathcal{G})) \cap \mathcal{C}^1((0, T_U]; H^1(\mathcal{G})). \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで, $[0, T_U]$ は時間局所解 $U = {}^t(u, v)$ が存在する時間幅である. このとき以下のアприオリ評価が示される.

Proposition 4.1. 初期値を $U_0 = {}^t(u_0, v_0) \in \mathcal{K}$ とする. このとき, 関数空間 (4.1) に存在する U_0 を初期値とする (3.1) の任意の時間局所解 U に対して,

$$\|U(t)\|_X \leq C(\|U_0\|_X + 1), \quad 0 \leq t \leq T_U, \quad (4.2)$$

がなりたつ. ここで, $C > 0$ は $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{G}, \|u_0\|_{L_1(\mathcal{G})}$ のみに依存する.

つまり, 同じ初期値から出発する任意の時間局所解は, (たとえ存在する時間幅 $[0, T_U]$ が違ってても) その後の時間のノルムは初期ノルムで一様に上から評価される. 以下にアприオリ評価の証明を与えるが, 本質は部分積分により生じる境界条件の部分が Kirchhoff 条件できれいに消滅して, 微分不等式を導出できることである.

Proof. 証明は大きく 4 つのステップに分かれる. 各等式・不等式に現れる定数 $C > 0$ は各段落で変わる場合があるが, $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{G}, l(= \|u_0\|_{L_1(\mathcal{G})})$ のみに依存する定数である.

Step 1. まず $u \geq 0$, $u \in H^2(\mathcal{G})$, $v \in H^3(\mathcal{G})$ であるから, u の方程式をグラフ上で積分すると,

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_1(\mathcal{G})} = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} \frac{d}{dt} \int_{I_i} u_i dx_i = \sum_{I_i \in \mathcal{E}} [D_i u_i - u_i D_i v_i]_{x_i=0}^{x_i=l_i} = 0, \quad (4.3)$$

であるから, 以下が成り立つ.

$$\|u(t)\|_{L_1(\mathcal{G})} \equiv \|u_0\|_{L_1(\mathcal{G})}, \quad 0 \leq t \leq T_U. \quad (4.4)$$

Step 2. 続いて $(\partial u/\partial t, 2u)_{L_2(\mathcal{G})} = (D^2u - D[uDv], 2u)_{L_2(\mathcal{G})}$ を考えると, (2.1) から

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2 \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 = - \int_{\mathcal{G}} u^2 [D^2v] dx$$

が成り立つ. ここで, Young の不等式より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$- \int_{\mathcal{G}} u^2 [D^2v] dx \leq \int_{\mathcal{G}} (\varepsilon |u|^4 + C_\varepsilon [D^2v]^2) dx = \varepsilon \|u\|_{L_4(\mathcal{G})}^4 + C_\varepsilon \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2$$

が成り立つ. このとき, Gagliardo-Nirenberg の不等式と (4.4) から,

$$\|u\|_{L_4(\mathcal{G})}^4 \leq C \|u\|_{H^1(\mathcal{G})}^2 \|u\|_{L_1(\mathcal{G})}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\mathcal{G})}^2,$$

がわかり, 以下の不等式を得る.

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 - \varepsilon C \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + (2 - \varepsilon C) \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq C_\varepsilon \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2. \quad (4.5)$$

再び Gagliardo-Nirenberg の不等式と (4.4) から, 任意の $0 < \varepsilon' < 1$ に対して

$$\|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\mathcal{G})}^{2/3} \|u\|_{L_1(\mathcal{G})}^{4/3} \leq \varepsilon' \left(\|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \right) + C_{\varepsilon'}$$

が成り立つ. したがって,

$$\|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \frac{C_{\varepsilon'}}{1 - \varepsilon'}. \quad (4.6)$$

以上より, ε と ε' を十分に小さく取れば, (4.5) から, 以下の不等式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq C \left(\|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 1 \right). \quad (4.7)$$

Step 3. 続いて $(\partial v/\partial t, 2v)_{L_2(\mathcal{G})} = (\alpha D^2v - \beta v + \gamma u, 2v)_{L_2(\mathcal{G})}$ を考えると, (2.1) から

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\alpha \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\beta \|v\|_{L_2}^2 = 2\gamma \int_{\mathcal{G}} uv dx \leq \beta \|v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + C \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2$$

がわかる. よって, (4.6) から, 任意の $0 < \xi_1 < 1$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\alpha \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \beta \|v\|_{L_2}^2 \leq \xi_1 \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + C_{\xi_1}. \quad (4.8)$$

Step 4. 最後に $(\partial v/\partial t, 2D^2v)_{L_2(\mathcal{G})} = (\alpha D^2v - \beta v + \gamma u, 2D^2v)_{L_2(\mathcal{G})}$ を考えると, (2.1) から,

$$\frac{d}{dt} \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\alpha \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\beta \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 = -2\gamma \int_{\mathcal{G}} u [D^2v] dx, \quad (4.9)$$

を得る ($\partial v/\partial t \in H^1(\mathcal{G})$ に注意すればやはり境界条件の部分が消えることがわかる). 再び (4.6) から, 任意の $0 < \xi_2 < 1$ に対して

$$-2\gamma \int_{\mathcal{G}} u [D^2v] dx \leq \alpha \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + C \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq \alpha \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \xi_2 \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + C_{\xi_2}$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{d}{dt} \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \alpha \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + 2\beta \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq \xi_2 \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + C_{\xi_2}. \quad (4.10)$$

不等式 (4.7) に $0 < \zeta < 1$ を乗じて, その結果を (4.8) と (4.10) に加えると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\zeta \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \right] + \left[\zeta \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \beta \|v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + (2\alpha + 2\beta) \|Dv\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \right] \\ + (\zeta - \xi_1 - \xi_2) \|Du\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + (\alpha - \zeta C) \|D^2v\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 \leq \zeta C + C_{\xi_1} + C_{\xi_2} \end{aligned}$$

という不等式が得られる. 今, ζ, ξ_1, ξ_2 を, $\alpha - \zeta C \geq 0$ かつ $\zeta - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$ を満たすように選ぶ. そうすれば, 以下の微分不等式

$$\frac{d}{dt} \left[\zeta \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|v\|_{H^1(\mathcal{G})}^2 \right] + \delta \left[\zeta \|u\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|v\|_{H^1(\mathcal{G})}^2 \right] \leq C$$

が得られる. ここで $\delta = \min\{1, \beta\}$ である. よって, 最終的に

$$\zeta \|u(t)\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|v(t)\|_{H^1(\mathcal{G})}^2 \leq e^{-\delta t} \left[\zeta \|u_0\|_{L_2(\mathcal{G})}^2 + \|v_0\|_{H^1(\mathcal{G})}^2 \right] + C, \quad 0 \leq t \leq T_U,$$

が得られ, 目的のアプリオリ評価 (4.2) が得られる. \square

以上のアプリオリ評価を用いて, 時間大域解の存在を証明する.

Theorem 4.1. 任意の初期値 $U_0 \in \mathcal{K}$ に対して, (3.1) の一意な時間大域解 U が以下の関数空間に存在する.

$$0 \leq U \in \mathcal{C}((0, \infty); \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, \infty); X) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); X). \quad (4.11)$$

Proof. まず, $U(t; U_0)$ を Theorem 3.1 により得られる U_0 を初期値とする (3.1) の時間局所解として, その存在時間幅を $[0, T_{U_0}]$ とする. 時間 $s \in (0, T_{U_0})$ を任意に固定して, $U_s = U(s; U_0)$ とおく. アプリオリ評価 (4.2) から $\|U_s\|_X \leq C(\|U_0\|_X + 1)$ がわかる. このとき, Theorem 3.1 を初期値 U_s に対して再び用いると, 一意な時間局所解 $U(t; U_s)$ とその存在時間幅 $[s, s + T'_{U_0}]$ が得られる. ここで, $\|U_s\|_X \leq C(\|U_0\|_X + 1)$ であることから $T'_{U_0} > 0$ は $\|U_0\|_X$ のみで決定されることに注意する. そこで,

$$\tau = \begin{cases} T'_{U_0}/2 & \text{if } T'_{U_0} < T_{U_0}, \\ T_{U_0}/2 & \text{if } T_{U_0} \leq T'_{U_0}, \end{cases}$$

とおき, $s = T_{U_0} - \tau$ とおく. このとき, 解の一意性より, $s \leq t \leq T_{U_0}$ に対して $U(t; U_0) = U(t; U_s)$ となる. これは, (3.1) の時間局所解 $U(t; U_0)$ を時間幅 $[0, T_{U_0} + \tau]$ で構成できたことになる. この延長の手続きを繰り返すことを考えたとき, アプリオリ評価 (4.2) から, 各手続きごとに延長される時間 τ は $\|U_0\|_X$ のみで決定される. よって, 有限回の延長手続きで任意の時間幅 $[0, T]$ まで延長可能であるため, 時間大域解の存在が示された. \square

5 おわりに

本稿では, グラフ上の走化性方程式の問題 (1.1) – (1.5) を発展方程式として定式化して, 一意な時間大域解を構成した. 筆者は時間大域解が定常解へ収束することまで証明しており現在論文を投稿中である. 以上の結果 (時間大域解の存在, 定常解への収束) は, 走化性方程式の空間次元が一次元の場合の既存の解析結果と同様の結果になっており, 悪く言えば「グラフ特有の結果」といった面白い解析結果とはなっていない. 今後の研究としては (走化性方程式に限らず) グラフ上の偏微分方程式に固有の解析結果の発見を目指している.

■謝辞 本研究は、学術研究助成基金助成金（研究活動スタート支援，課題番号 19K23405）の助成を受けている。

参考文献

- [1] G. Lumer, “Connecting of local operators and evolution equations on networks,” in *Proc. of Potential Theory Copenhagen 1979*, pp. 219–234, 1980.
- [2] J. von Below, “Sturm–Liouville eigenvalue problems on networks,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 10, no. 4, pp. 383–395, 1988.
- [3] E. Yanagida, “Stability of nonconstant steady states in reaction–diffusion systems on graphs,” *Japan J. Indust. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 25–42, 2001.
- [4] E. Korotyaev and I. Lobanov, “Schrödinger operators on zigzag nanotubes,” *Ann. Henri Poincaré*, vol. 8, no. 6, pp. 1151–1176, 2007.
- [5] P. Kuchment and L. A. Kunyansky, “Spectral properties of high contrast band-gap materials and operators on graphs,” *Experiment. Math.*, vol. 8, no. 1, pp. 1–28, 1999.
- [6] B. Dekoninck and S. Nicaise, “The eigenvalue problem for networks of beams,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 314, no. 1–3, pp. 165–189, 2000.
- [7] E. F. Keller and L. A. Segel, “Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability,” *J. Theoret. Biol.*, vol. 26, no. 3, pp. 399–415, 1970.
- [8] S. Childress and J. K. Percus, “Nonlinear aspect of chemotaxis,” *Math. Biosci.*, vol. 56, no. 3–4, pp. 217–237, 1981.
- [9] K. Osaki and A. Yagi, “Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller–Segel equations,” *Funkcial. Ekvac.*, vol. 44, no. 3, pp. 441–469, 2001.
- [10] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, “Application of the trudingner-moser inequality to a parabolic system of chemotaxis,” *Funkcial. Ekvac.*, vol. 40, no. 3, pp. 411–433, 1997.
- [11] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, “A blow-up mechanism for a chemotaxis model,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, vol. 24, no. 4, pp. 633–683, 1997.
- [12] M. Winkler, “Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller–Segel system,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 100, no. 5, pp. 748–767, 2013.
- [13] F. Camilli and L. Corrias, “Parabolic models for chemotaxis on weighted networks,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 108, no. 4, pp. 459–480, 2017.
- [14] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*. Springer, 2010.
- [15] S. Iwasaki, “Fractional powers of sectorial operators in network shaped domains,” *Sci. Math. Jpn.*, (accepted for publication).