重さ 3 の Jacobi テータ積の L 関数の特殊値の超幾何関数表示

伊東良純 (Ryojun Ito)*

1　導入と主結果

複素数列 $\{a_n\}$ に対し, Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ という, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を一般化した級数が定義される ($a_n = 1$ の場合が $\zeta(s)$ である). 古典的に, Riemann ゼータ関数の正の偶数での特殊値 $\zeta(2n)$ は Bernoulli 数を用いて表されることが知られているが, 一般の数列に対し, Dirichlet 級数の特殊値はどのように表されるだろうか.

本稿では, 保型形式 f により定まる Dirichlet 級数, すなわち, 保型形式の L 関数を考える. 重さ k の保型形式 f の q 展開 (Fourier 級数展開) を $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ とするとき, L 関数 $L(f,s)$ を

$$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > k+1,$$

で定義する. ここでは, 保型形式 f として, 重さ 1/2 の保型形式である Jacobi テータ関数

$$\theta_2(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2},$$

の積で表される重さ 3 の保型形式を考える. 一般に, f が Jacobi テータ積の場合, $L(f,s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続され, ある関数等式を満たすことが知られている (cf. [12]).

近年, いくつかの保型形式の場合に, L 関数の特殊値が一般超幾何関数

$${}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| z\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_{p+1})_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{z^n}{(1)_n},$$

の特殊値で表されることがわかってきた. ここで, $(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号を表す. 例えば,

1. 大坪 [7] はレギュレーターと呼ばれる幾何的不偏量を経由して, いくつかの虚数乗法を持つ楕円曲線に対応する尖点形式の L 関数の $s=2$ での値を ${}_3F_2(1)$ で表した.
2. Rogers [8], Rogers-Zudilin [10], Zudilin [13], 伊東 [4] は, 特定の楕円曲線に対応する尖点形式の L 関数の $s=2$ での値を, 解析的な手法を用いて ${}_3F_2(1)$ で表した. また, Zudilin [13] は導手 32 の楕円曲線の L 関数の $s=3$ での値を ${}_4F_3(1)$ で表した.

* 千葉大学大学院理学研究院, E-mail: afua9032@chiba-u.jp

3. Rogers-Wan-Zucker [9] は, Dedekind エータ関数 $\eta(q) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ の商で表される重さ 3 の特定の尖点形式の L 関数の $s=1$ での値を解析的な手法を用いてガンマ関数の特殊値で表した. また, 伊東 [5] は尖点とは限らない特定の保型形式の L 関数の $s=1$ での値を ${}_3F_2(1)$ で表した.
4. Samart [11] は, Laurent 多項式に対し定義される Mahler 測度という不偏量を経由して, 特定の重さ 3 の尖点形式の L 関数の $s=3$ での値を ${}_5F_4(1)$ で表した.

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{L\text{ 関数}} \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{レギュレーター}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{Mahler 測度}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{超幾何関数}} &
\end{tikzcd}$$

本稿では, 重さ 3 の Jacobi テータ積として,

$$f_1(q) := \frac{1}{16}\theta_2^4(q)\theta_4^2(q), \quad f_2(q) := \frac{1}{16}\theta_2^4(q)\theta_4^2(q^2),$$

を考える. $f=f_1, f_2$ の場合, $L(f,s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に正則関数として解析接続されることに注意する.

本稿の目的は, $f_1(q)$ と $f_2(q)$ の L 関数の $s=3,4$ での値を一般超幾何関数の 2 変数への一般化である Kampé de Fériet 超幾何関数

$$\begin{aligned} &F^{p;q;r}_{s;t;u}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ d_1,\dots,d_s\end{matrix};\begin{matrix}b_1,\dots,b_q\\ e_1,\dots,e_t\end{matrix};\begin{matrix}c_1,\dots,c_r\\ f_1,\dots,f_u\end{matrix}\middle| x,y\right] \\ &\quad := \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}(a_i)_{m+n}\prod_{i=1}^{q}(b_i)_m\prod_{i=1}^{r}(c_i)_n}{\prod_{i=1}^{s}(d_i)_{m+n}\prod_{i=1}^{t}(e_i)_m\prod_{i=1}^{u}(f_i)_n}\frac{x^my^n}{(1)_m(1)_n}, \end{aligned}$$

の特殊値で表すことである.

次が主結果である.

定理 1 ([6])**.** 1. $L(f_1,3) = \dfrac{\pi^2}{96}F^{1;2;2}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}2\\ \frac{5}{2}\end{matrix};\begin{matrix}1,1\\ 2\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right]$,

2. $L(f_2,3) = \dfrac{\pi^3}{128}F^{1;2;2}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ 2\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right]$,

3. $L(f_1,4) = \dfrac{\pi^3}{288}\left(3F^{1;3;2}_{1;2;1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right] + F^{1;3;2}_{1;2;1}\left[\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}\end{matrix};\begin{matrix}1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right]\right)$,

4. $L(f_2,4) = \dfrac{\pi^4}{768}\left(2F^{1;3;2}_{1;2;1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};\begin{matrix}1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right] + F^{1;3;2}_{1;2;1}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 2\end{matrix};\begin{matrix}1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| 1,1\right]\right)$.

重さ 3 の保型形式の L 関数の $s=3,4$ での値の超幾何関数表示を直接計算で与えたのは本結果が初めてであることに注意する.

この定理の証明には Rogers-Zudilin 法を用いる．この手法の概要は次の通りである．

保型形式 $f(q)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ および $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対し, 特殊値 $L(f,n)$ は f の Mellin 変換

$$L(f,n)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 f(q)(\log q)^{n-1}\frac{dq}{q}, \tag{1}$$

で得られる．$\alpha:=\theta_2^4(q)/\theta_3^4(q)$ とおく．Jacobi の等式 $\theta_3^4(q)=\theta_2^4(q)+\theta_4^4(q)$ より, $1-\alpha=\theta_4^4(q)/\theta_3^4(q)$ であることに注意する．この α を用いて, Jacobi テータ関数と超幾何関数が次のようにして結びつくことが知られている [1, 2].

$$\theta_3^2(q)={}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right|\alpha\right],\qquad \frac{dq}{q}=\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha){}_2F_1{}^2\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right|\alpha\right]}. \tag{2}$$

これらの変換公式といくつかの計算を用いることで, $n=3,4$ の場合, (1) を次の型の積分に書き直すことが出来る．

$$L(f,n)=\int_0^1(\alpha^k(1-\alpha)^l\text{の多項式}){}_2F_1(\alpha){}_pF_{p-1}(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}.$$

さらにいくつかの計算をすることで, $L(f,n)$ の超幾何関数表示を得る．

2　定理 1 の証明

ここでは Rogers-Zudilin 法による計算を $L(f_2,3)$ の場合を例に計算する．他の場合は [6] を参照されたい．

(1) において, $q=e^{-\pi u}$ と変数変換すると,

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^3}{32}\int_0^\infty\theta_2^4(e^{-\pi u})\theta_4^2(e^{-2\pi u})u^2du.$$

ここで, テータ関数の involution 公式 $\sqrt{u}\theta_4(e^{-\pi u})=\theta_2(e^{-\frac{\pi}{u}})$ および, $\theta_2^2(q)$, $\theta_2^4(q)$ の Lambert 級数展開 [3]

$$\theta_2^2(q)=4\sum_{n,k=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)q^{n(k-1/2)},\quad \theta_2^4(q)=16\sum_{n,k=1}^{\infty}(2n-1)(n)q^{(2n-1)(2k-1)},$$

(ただし, $\chi_{-4}(n):=\mathrm{Im}(i^n)$) を用いると次を得る．

$$\begin{aligned}L(f_2,3)&=\pi^3\int_0^\infty\sum_{n,k,r,s=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)(2r-1)e^{-\pi u(2r-1)(2s-1)}e^{-\frac{\pi n(k-1/2)}{2u}}udu\\&=\pi^3\int_0^\infty\left(\sum_{n,s=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)n^2e^{-\pi un(2s-1)}\right)\left(\sum_{k,r=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi(2r-1)(k-1/2)}{2u}}}{2r-1}\right)udu.\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の等式では $u\mapsto\frac{n}{2r-1}u$ と変数変換した．1 つ目の級数はテータ積であることが知られている [3]:

$$\sum_{n,s=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)n^2q^{n(2s-1)}=\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_4^4(q^2).$$

この公式を上の積分に代入し, 再びテータ級数の involution 公式を用いることで次を得る.

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^3}{32}\int_0^\infty \theta_4^2(e^{-\pi/2u})\theta_2^4(e^{-\pi/2u})\left(\sum_{k,r=1}^\infty \frac{e^{-\frac{\pi(2r-1)(k-1/2)}{2u}}}{2r-1}\right)\frac{du}{u^2}.$$

ここで, $u\mapsto \frac{1}{u}$, $q=e^{-\pi u/2}$ と変数変換することで, 次の積分表示を得る.

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^2}{16}\int_0^1 \theta_2^4(q)\theta_4^2(q)\sum_{n,s=1}^\infty \frac{q^{2(n-1/2)(s-1/2)}}{2n-1}\frac{dq}{q}.$$

積分内の級数は超幾何関数を用いて表される.

$$\sum_{n,s=1}^\infty \frac{q^{2(n-1/2)(s-1/2)}}{2n-1}=\frac{\alpha^{1/2}}{4}{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right|\alpha\right].$$

この公式と変換公式 (2) を用いることで, 次の積分表示を得る.

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^2}{128}\int_0^1 \alpha^{3/2}(1-\alpha)^{1/2}{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right|\alpha\right]{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right|\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}.$$

最後に, 超幾何関数 ${}_2F_1(\alpha)$, ${}_3F_2(\alpha)$ を級数展開し項別積分することで, $L(f_2,3)$ の超幾何関数表示

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^3}{128}F^{1;2;2}_{1;1;1}\left[\left.\begin{matrix}\frac{3}{2};\ \frac{1}{2},1;\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 2;\ \frac{3}{2};\ 1\end{matrix}\right|1,1\right]$$

を得る.

注意 2. [11] において, Samart は Mahler 測度を経由して次の結果を得ている.

$$L(f_2,3)=\frac{\pi^3}{1024}\left(48\log 2-{}_5F_4\left[\left.\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,1\\ 2,2,,2,2\end{matrix}\right|1\right]\right).$$

したがって, L 関数の特殊値を経由して, Kampé de Fériet 超幾何関数の特殊値と一般超幾何関数の特殊値の間の非自明な関係式を得る.

$$8F^{1;2;2}_{1;1;1}\left[\left.\begin{matrix}\frac{3}{2};\ \frac{1}{2},1;\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 2;\ \frac{3}{2};\ 1\end{matrix}\right|1,1\right]=48\log 2-{}_5F_4\left[\left.\begin{matrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,1\\ 2,2,,2,2\end{matrix}\right|1\right].$$

この等式を L 関数の特殊値を経由せずに直接導くことが出来るかどうかはまだわかっていない.

参考文献

[1] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part II*, Springer, New York, NY, 1989.

[2] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part III*, Springer, New York, NY, 1991.

[3] S. Cooper, *Ramanujan's theta functions*, Springer, 2017.

[4] R. Ito, *The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions*, Ramanujan J, 45, 2018, 433-449.

[5] R. Ito, *The special values of L-functions at $s = 1$ of theta products of weight 3*, Research in Number Theory, 5: 30, 2019.

[6] R. Ito, *On special values at integers of L-functions of Jacobi theta products of weight 3*, in preparation.

[7] N. Otsubo, *Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions*, J.Number Theory, 131, 2011, 648-660.

[8] M. Rogers, *Boyd's conjectures for elliptic curves of conductor 11, 19, 39, 48 and 80*, unpublished notes, 2010.

[9] M. Rogers, J.G. Wan , I.J. Zucker, *Moments of elliptic integrals and critical L-values*, Ramanujan J. 37, 2015, 113-130.

[10] M. Rogers, W. Zudilin, *From L-series of elliptic curves to Mahler measures*, Compositio Math. 148, 2012, 385-414.

[11] D. Samart, *Three-variable Mahler measures and special values of modular and Drichlet L-series*, Ramanujan J. 32, 2013, 245-268.

[12] G. Shimura, *Elementary Dirichlet Series and Modular Forms*, Springer, 2007.

[13] W. Zudilin, *Period(d)ness of L-Values*, Number Theory and Related Fields, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 43, 2013, 381-395.