

解析的な正定値関数に付随する再生核 HILBERT 空間上の合成作用素の有界性について

石川 勲

理化学研究所 革新知能統合センター/慶應義塾大学 理工学部

1. 導入

合成作用素は古くから研究されている基本的な研究対象であるが ([16, 14, 13, 4, 3, 2]), 近年では機械学習やデータ解析といった応用の側面からも高い注目を集めている [15, 11, 8, 7, 6]. このような応用を考える上で, その性能を理論的に保障するには, 合成作用素の作用する関数空間の設定, 及び, その合成作用素の有界性やコンパクト性などの作用素論的な性質は本質的である. 本研究では, Euclid 空間におけるある種の正定値関数から構成される再生核 Hilbert 空間 (以下では RKHS と略記する) に注目する. 本研究において, その RKHS の上に定まる合成作用素が有界線型作用素であるための必要十分条件はその合成作用素を定める写像が Affine 変換であるということを証明した. 本研究は池田正弘氏, 澤野嘉宏氏との共同研究である.

1.1. 合成作用素. まず, 合成作用素について説明する. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を集合として, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を写像とする. さらに, V , (resp. W) を $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) 上のある $\mathbb{C}$ -値関数たちの成す Banach 空間とする. f に付随する合成作用素 $C_f: W \rightarrow V$ を f による引き戻しによって定義する, すなわち, $h \in V$ に対して,

$$C_f h := h \circ f$$

と定義する. ただし, C_f の定義域は $\{v \in V : v \circ f \in W\}$ である. 一般に, C_f の有界性やコンパクト性などの作用素論的な性質は V, W の選択に強く依存する. 本研究は, 主に V, W を RKHS の場合に考察する.

1.2. 再生核 Hilbert 空間 (RKHS). RKHS について説明する. RKHS は正定値カーネルと呼ばれる関数と対になる空間である. 写像 $k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ が正定値カーネルであるとは, 任意有限個の元 $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{X}$ に対して, 行列 $(k(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ が半正定値エルミート行列になることである. $x \in \mathcal{X}$ に対して $k_x \in \mathbb{C}^{\mathcal{X}}$ を $k_x(y) = k(x, y)$ とする. Moore-Aronszajn の定理によると, あるヒルベルト空間 $H_k \subset \mathbb{C}^{\mathcal{X}}$ が唯一存在して, 次の 2 つの条件により特徴付けられる: (1) 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して, $k_x \in H_k$, (2) 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して, $\langle h, k_x \rangle = h(x)$. このヒルベルト空間 H_k を再生核 Hilbert 空間 (Reproducing kernel Hilbert space, RKHS) と呼ぶ.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ の時に重要な正定値カーネルの例として正定値関数から定まるものがある. $\mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数 u が正定値関数であるとは, $(x, y) \mapsto u(x - y)$ が正定値カーネルであることである. u が連続である時, u が正定値であるための必要十分条件はある有限 Borel 測度 μ が存在して $u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} \mu(\xi)$ となることであること知られている (Bochner の定理). 重要な正定値関数の例は Gauss 関数 $e^{-x^\top \Sigma x}$ である (Σ は正定値対称行列).

2. 主結果

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 u について, 正則行列の集合を次のように定義する:

$$\mathcal{G}(u) = \{A \in \text{GL}_d(\mathbb{R}) : \hat{u}(A^T \xi) \geq \lambda \hat{u}(\xi) \text{ for some } \lambda > 0\}.$$

更に, 関数 $w \in L^1(\mathbb{R}^d)$ が至る所で非負である時,

$$L^2(w) := \left\{ h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\}$$

と定義する. 本研究の主結果は以下の通りである:

Theorem 1. $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^d$ 上連続かつ二乗可積分可能な正定値関数として, 正定値カーネルを $k(x, y) := u(x - y)$ と定義する. さらに次の条件を仮定する:

- (1) 任意の正の整数 $a > 0$ に対して, ある定数 $C_a > 0$ が存在して $|\hat{u}(\xi)| < C_a e^{-a|\xi|}$,
- (2) 任意の複素数 $z \in \mathbb{C}^d$ に対して, 線型作用素 $m_z : L^2(\hat{u}) \rightarrow L^2(\hat{u}); h(x) \mapsto e^{z^\top x} h(x)$ と置く. この時, 次の条件を満たす:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \limsup_n \|m_z|_{P_n}\|^{1/n} < \infty,$$

- (3) $\langle \mathcal{G}(u) \rangle_{\mathbb{R}} = M_d(\mathbb{R})$, すなわち, $\mathcal{G}(u)$ は $M_d(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上生成する.

ここで, $P_n \subset L^2(\hat{u})$ は total degree が n 以下の多項式全体の集合とし, $M_d(\mathbb{R})$ は d 次実行列全体である. この時, 開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ 上の写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して, 合成作用素 $C_f : H_k \rightarrow H_{k|_{U^2}}$ の定義域が H_k 全体となり有界線型作用素となるための必要十分条件は $f(x) = Ax + b$ ($A \in \mathcal{G}(u), b \in \mathbb{R}^d$) となることである.

この結果は応用上重要な u が Gaussian の場合を含んでおり, さらに [2] の一般化を与える. より詳しくは [1] を参照

REFERENCES

- [1] M. Ikeda, I. Ishikawa, and Y. Sawano, Composition operators on reproducing kernel Hilbert spaces with analytic positive definite functions, arXiv: 1911.11992
- [2] G.A. Chacon, G.R. Chacon and J. Gimenez, Composition operators on spaces of entire functions, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2205–2218.
- [3] CCG B. Carswell, B.D. MacCluer and A. Schuster, Composition operators on the Fock space, Acta Sci. Math. **69** (2003), 871–887.
- [4] C.C. Cowen, and B.D. MacCluer, Composition operators on spaces of analytic functions, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. xii+388
- [5] Y. Hashimoto, I. Ishikawa, M. Ikeda and Y. Kawahara, Krylov Subspace Method for Nonlinear Dynamical Systems with random noises, arXiv:1909.03634.
- [6] I. Ishikawa, K. Fujii, M. Ikeda, Y. Hashimoto and Y. Kawahara Metric on Nonlinear Dynamical Systems with Perron–Frobenius Operators, in Advances in Neural Information Processing Systems **31** (2018), 911–919.
- [7] I. Ishikawa, A. Tanaka, M. Ikeda and Y. Kawahara Metric on Random Dynamical Systems with Vector-valued Reproducing Kernel Hilbert Spaces, arxiv:1906.06957
- [8] Y. Kawahara, Dynamic Mode Decomposition with Reproducing Kernels for Koopman Spectral Analysis, Neural Information Processing Systems, Advances in Neural Information Processing Systems **29** (NIPS 2016), 9 pages.
- [9] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis. Cambridge University Press, 2004.
- [10] B.O. Koopman. Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space. Proceedings of the National Academy of Sciences, **17**(5) (1931), 315–318.
- [11] I. Mezić, Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions, Nonlinear Dynamics, **41**(1) (2005), 309–325.

- [12] S. Saitoh and Y. Sawano, Theory of reproducing kernel Hilbert spaces, Development of Mathematics **44**, Springer (2016).
- [13] J.H. Shapiro, The essential norm of a composition operator, Ann. of Math. (2) 125 (1987), no. 2, 375–404.
- [14] W. Smith, Composition operators between Bergman and Hardy spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 6, 2331–2348.
- [15] N. Takeishi, Y. Kawahara and T. Yairi,
Learning Koopman Invariant Subspaces for Dynamic Mode Decomposition
<https://arxiv.org/pdf/1710.04340.pdf>
- [16] K. Zhu, Analysis on Fock spaces, Graduate Texts in Mathematics, vol. 263, Springer-Verlag, New York, 2012.

Email address: `isao.ishikawa@riken.jp`