

有限有向グラフに対する 四元数水野-佐藤ゼータ関数の伊原表示

横浜国立大学大学院 理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
石川彩香 (Ayaka ISHIKAWA)

概要

水野-佐藤ゼータとは有限対称有向グラフに対して定義された複素数荷重のグラフゼータ [4] であり、伊原ゼータ [1] に荷重を加えて拡張したものである。今野-三橋-佐藤 [2] はそれを四元数荷重に拡張したが、グラフは有限対称有向グラフのままであった。本研究では、この四元数水野-佐藤ゼータを多重ループや多重アークを許す一般の有限有向グラフ上で再定義し、さらに伊原表示と呼ばれる行列式表示を与えた。伊原表示とはグラフゼータ特有の行列式表示である。近年では今野-佐藤の定理 [3] によって量子ウォークモデルの遷移行列の固有値を与えるに合理的な形であることが示され、挙動の解析にも重用されている。

1 定義

本稿で扱う四元数水野-佐藤ゼータは行列式表示で与える。そのためにも、まずは四元数の定義を導入し、四元数行列の行列式である Study 行列式を 1.1 節で定義する。その後、1.2 節にてグラフの用語や四元数水野-佐藤ゼータの定義、および主定理を与える。

1.1 四元数

四元数環とは次の性質を満たす $1, i, j, k$ を基底とする $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{H}$ を指す:

$$i^{-1} = j^{-1} = k^{-1} = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

この元のことを四元数とよぶ。四元数 $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ に対し、その共役元は $x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ である。さらに、任意の四元数 x は 2 つの複素数 a, b で $x = a + jb$ と一意に書き表せる。 a と b をそれぞれ simplex part, perplex part とよび、この分割を symplectic decomposition という。四元数行列 $M \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{H})$ についても同様に simplex part と perplex part に対する行列 M^S, M^P を用いて $M = M^S + jM^P$ と書ける。次に、四元数行列に対する行列式を定義する。写像 $\psi : \text{Mat}(m, n; \mathbb{H}) \rightarrow \text{Mat}(2m, 2n; \mathbb{C})$ を以下で定める:

$$\psi : \text{Mat}(m, n; \mathbb{H}) \rightarrow \text{Mat}(2m, 2n; \mathbb{C}) : M \mapsto \begin{bmatrix} M^S & -\overline{M^P} \\ M^P & \overline{M^S} \end{bmatrix}.$$

ただし、 $\overline{A}$ は A の共役行列である。このとき、Study 行列式 [5] は以下で定義される:

$$\text{Sdet} : \text{Mat}(n; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{C} : M \mapsto \det(\psi(M)).$$

1.2 四元数水野-佐藤ゼータ

ある集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, $\mathfrak{A}$ を順序対の集合 $\{(u, v) | u, v \in V\}$ の部分集合とする. このとき, $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を有向グラフといい, $V, \mathfrak{A}$ の元をそれぞれ頂点, アークとよび, 特にアーク $(u, u) \in \mathfrak{A}$ をループとよぶ. Δ をループや多重辺を含む有限有向グラフとする. アーク $a = (u, v) \in \mathfrak{A}$ に対して, 始点 u , 終点 v をそれぞれ $t(a), h(a)$ で表し, $\mathfrak{A}_{uv} := \{a \in \mathfrak{A} | t(a) = u, h(a) = v\}$ とおく. アーク $a \in \mathfrak{A}_{uv}$ に対して, 任意の $a' \in \mathfrak{A}_{vu}$ を a の逆アークとよぶ. さらに, $\delta_{a^{-1}a'} (a, a' \in \mathfrak{A})$ は a, a' が互いに他の逆アークのとき 0, それ以外のとき 1 となる函数とする. 任意の写像 $\tau : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{H}$ に対し, 写像 $\theta^{MS} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{H}$ を以下で定める:

$$\theta^{MS}(a, a') = \tau(a')(\delta_{h(a)t(a')} - \delta_{a^{-1}a'}).$$

行列 $M := (\theta^{MS}(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ を定めたとき, Δ に対する四元数水野-佐藤ゼータ $Z_{\Delta}(t; \theta^{MS})$ を以下で定義する:

$$Z_{\Delta}(t; \theta^{MS}) := \frac{1}{\text{Sdet}(I - tM)}$$

水野-佐藤ゼータは元々, 有限対称有向グラフに対する複素数荷重のグラフゼータ [4] であり, 伊原ゼータ [1] を拡張したものである. 実際, $\theta^I := \theta^{MS}|_{\tau=1} = \delta_{h(a)t(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$ とおき, Δ を有限単純グラフ G に対応する対称有向グラフ $\Delta(G)$ とすると, $Z_{\Delta(G)}(t; \theta^I)$ は伊原ゼータそのものとなる. その後, 今野-三橋-佐藤 [2] により, 有限対称有向グラフに対する四元数荷重の水野-佐藤ゼータが定義され, その伊原表示が与えられた. 伊原表示とはグラフの隣接行列と次数行列を用いる行列式表示のことである. 例えば, 伊原ゼータの伊原表示は以下の通りである:

定理 1. 有限単純グラフ $G = (V, E)$ に対する対称有向グラフを $\Delta(G)$ で表す. また, G の隣接行列と次数行列をそれぞれ A_G, D_G で表す. このとき, $\Delta(G)$ に対する伊原ゼータ $Z_{\Delta(G)}(t; \theta^I)$ の伊原表示は以下で与えられる:

$$Z_{\Delta(G)}(t; \theta^I) = \frac{1}{(1 - t^2)^{|E| - |V|} \det(I - tA_G + t^2(D_G - I))}.$$

四元数水野-佐藤ゼータの伊原表示は, “荷重隣接行列” $A_{\Delta}^{\theta^{MS}}$ と “荷重次数行列” $D_{\Delta}^{\theta^{MS}}$ を用いて次のように表される:

定理 2. $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ を多重アークや多重ループを含む有限有向グラフとする. 各 2 頂点 $u, v \in V$ に対して $\tau(u, v)$ を

$$\tau(u, v) := \begin{cases} 1 - t^2(\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{vu}} \tau(a'))(\sum_{a'' \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a'')) & u \neq v, \\ 1 + t(\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{uu}} \tau(a')) & \text{その他} \end{cases}$$

と定める. さらに, 行列 $A_{\Delta}^{\theta^{MS}}, D_{\Delta}^{\theta^{MS}} \in \text{Mat}(|V|, \mathbb{H})$ を次の通りに定める:

$$(A_{\Delta}^{\theta^{MS}})_{uv} := \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) \right) \tau(u, v)^{-1},$$

$$(D_{\Delta}^{\theta^{MS}})_{uu} := \sum_{v \in V, u \neq v} \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) \right) \tau(u, v)^{-1} \left(\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{vu}} \tau(a') \right).$$

ただし, $D_{\Delta}^{\theta^{MS}}$ は対角行列である. θ^{MS} から定まる行列を $J := (\tau(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a,a' \in \mathfrak{A}}$ とおくと, 有限有向グラフ Δ に対する四元数水野-佐藤ゼータの伊原表示は以下で与えられる:

$$Z_{\Delta}(t; \theta^{MS}) = \frac{1}{\text{Sdet}(I - tA_{\Delta}^{\theta^{MS}} + t^2 D_{\Delta}^{\theta^{MS}}) \text{Sdet}(I + tJ)}.$$

注意 1. 有限グラフ G に対して, 等式

$$A_{\Delta(G)}^{\theta^I} = (1 - t^2)^{-1} A_G, \quad D_{\Delta(G)}^{\theta^I} = (1 - t^2)^{-1} D_G$$

が成り立つ.

2 証明の概要

この節では本稿の主定理である定理 2 の証明の概要を記す. 行列 $M := (\theta^{MS}(a, a'))_{a,a' \in \mathfrak{A}}$ に対して, 行列 K, L を以下で定める:

$$\begin{cases} K := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathfrak{A}, v \in V} \\ L := (\tau(a')\delta_{vt(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}} \end{cases}$$

このとき, $M = KL - J$ と表せることから, $Z_{\Delta}(t; \theta^{MS})^{-1}$ は以下のように書き換え可能である:

$$\begin{aligned} Z_{\Delta}(t; \theta^{MS})^{-1} &= \text{Sdet}(I - tM) \\ &= \text{Sdet}((I + tJ) - tLK) \\ &= \text{Sdet}(I - tLK(I + tJ)^{-1}) \text{Sdet}(I + tJ) \\ &= \text{Sdet}(I - tL(I + tJ)^{-1}K) \text{Sdet}(I + tJ). \end{aligned}$$

頂点 $u, v \in V$ 間のアークの集合を $\mathfrak{A}(u, v) := \mathfrak{A}_{uv} \cup \mathfrak{A}_{vu}$ で表す. Δ の部分グラフ $(V, \mathfrak{A}(u, v))$ に対する J, K, L の小行列をそれぞれ

$$\begin{cases} J(u, v) := (\tau(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a,a' \in \mathfrak{A}(u,v)} \\ K(u, v) := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in \mathfrak{A}(u,v), v \in V} \\ L(u, v) := (\tau(a')\delta_{vt(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}(u,v)} \end{cases}$$

とおくと, $L(I + tJ)^{-1}K$ は

$$L(I + tJ)^{-1}K = \sum_{u,v \in V} L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$$

と書ける. したがって, 各 2 頂点 u, v のアークの集合 $\mathfrak{A}(u, v)$ の様相について場合分けをして $L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$ を計算すれば良いことがわかる. ただし, $\mathfrak{A}(u, v) = \emptyset$ の場合は, それに対する $J(u, v), K(u, v), L(u, v)$ の行または列の個数は 0 であり, $L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$ は 0 次の行列となるから考えなくても良い. 任意の有限有向グラフにおいて, $\mathfrak{A}(u, v) \neq \emptyset$ は以下の 4 つの場合のいずれかに当てはまる:

$$\mathfrak{A}(u, v) = \begin{cases} \mathfrak{A}_{uv} \text{ or } \mathfrak{A}_{vu}, & (1) \\ \mathfrak{A}_{uu} & u = v, & (2) \\ \mathfrak{A}_{uv} \sqcup \mathfrak{A}_{vu} & \mathfrak{A}_{uv}, \mathfrak{A}_{vu} \neq \emptyset. & (3) \end{cases}$$

(1) の場合, つまり u, v 間の任意のアーキに対して逆アーキが存在しない場合, $J(u, v) = O$ となるので, $L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v)$ は以下で与えられる:

$$L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v) = L(u, v)K(u, v).$$

この行列成分は

$$(L(u, v)K(u, v))_{u_i, u_j} = \sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) = \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) \right) \tau(u, v)^{-1} \quad (4)$$

と書ける.

(2) の場合では以下の四元数行列の逆行列に関する命題を用いる:

命題 1. k 次正方行列 $M = (m_j)_{i, j \in [1, k]}$ について,

$$(I + M)^{-1} = I - (1 + \sum_{j=1}^k m_j)^{-1} M$$

が成り立つ.

これを用いると, $L(u, u)(I + tJ(u, u))^{-1}K(u, u)$ を以下のように書き換えることができる:

$$\begin{aligned} L(u, u)(I + tJ(u, u))^{-1}K(u, u) &= L(u, u)(I - t\tau(u, u)^{-1}J(u, u))K(u, u) \\ &= L(u, u)\tau(u, u)^{-1}\{I + t(t^{-1}(\tau(u, u) - 1)I - J(u, u))\}K(u, u) \\ &= L(u, u)\tau(u, u)^{-1}K(u, u). \end{aligned}$$

この行列成分は

$$(L(u, u)\tau(u, u)^{-1}K(u, u))_{u_i, u_i} = \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{u_i u_j}} \tau(a) \right) \tau(u_i, u_j)^{-1} \quad (5)$$

と書ける.

(3) の場合について, $\mathfrak{A}_{uv} = \{\tau(a_i) | i = 1, 2, \dots, k\}$, $\mathfrak{A}_{vu} = \{\tau(a_{k+i}) | i = 1, 2, \dots, l\}$ とおく. まず, 行列 $(I + tJ(u, v))^{-1}$ を求める. $I + tJ(u, v)$ は以下のようにブロック行列で表される:

$$I + tJ(u, v) = \begin{pmatrix} I & tB \\ tC & I \end{pmatrix}$$

$$\text{where } B = (\tau(a_{k+j}))_{i \in [1, k], j \in [1, l]}, \quad C = (\tau(a_j))_{i \in [1, l], j \in [1, k]}.$$

この逆行列を以下の命題を用いて書き下す.

命題 2. ブロック行列 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (A, D は正方行列) に対し, $M/A := D - CA^{-1}B$ を M の A に関する *Schur* 補行列という. $A, D - CA^{-1}B$ が正則であるとき, M の逆行列は

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}$$

で表せる. さらに, M の *Study* 行列式は $\text{Sdet}(M) = \text{Sdet}(A)\text{Sdet}(M/A)$ で表せる.

命題 3. ブロック行列 M を命題 2 と同様のものとする. $M/A, A, D$ に加えて, M の D に関する Schur 補行列 $M/D := A - BD^{-1}C$ が正則のとき,

$$(M/D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}$$

となる. さらに, $\text{Sdet}(M) = \text{Sdet}(D)\text{Sdet}(M/D)$ が成り立つ.

これらを用いると, $(I + tJ(u, v))^{-1}$ は

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = \begin{pmatrix} (I - t^2BC)^{-1} & -tB(I - t^2CB)^{-1} \\ -t(I - t^2CB)^{-1}C & (I - t^2CB)^{-1} \end{pmatrix}$$

と書ける. ここで,

$$BC = \left(\sum_{i=k+1}^{k+l} \tau(a_i) \right) C', \quad CB = \left(\sum_{i=1}^k \tau(a_i) \right) B',$$

$$\text{where } B' = (\tau(a_{k+j}))_{i,j \in [1,l]}, \quad C' = (\tau(a_j))_{i,j \in [1,k]}$$

となるので, $-t^2BC, -t^2CB$ に命題 1 を適用すると,

$$(I - t^2BC)^{-1} = I + t^2\tau(u, v)^{-1}BC, \quad (I - t^2CB)^{-1} = I + t^2\tau(v, u)^{-1}CB,$$

が得られる. さらに,

$$-tB(I - t^2CB)^{-1} = -t\tau(u, v)B, \quad -t(I - t^2CB)^{-1}C = -t\tau(v, u)C$$

と書ける. したがって, $T(u, v) = \tau(u, v)I_k \oplus \tau(v, u)I_l$ とおくと, $(I + tJ(u, v))^{-1}$ は以下のように表される:

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = I - tT(u, v)^{-1}J + t^2T(u, v)^{-1}J^2.$$

ここで, $J(u, v)^2K(u, v) = t^{-2}\{I - T(u, v)\}K(u, v)$ が成り立つことから

$$L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v) = L(u, v)T(u, v)^{-1}K(u, v) - tL(u, v)T(u, v)^{-1}J(u, v)K(u, v)$$

となり, 各行列の成分は以下で与えられる:

$$(L(u, v)T(u, v)^{-1}K(u, v))_{u_i, u_j} = \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) \right) \tau(u, v)^{-1}, \quad (6)$$

$$(L(u, v)T(u, v)^{-1}J(u, v)K(u, v))_{u_i, u_i} = \sum_{v \in V, u_i \neq v} \left(\sum_{a \in \mathfrak{A}_{u_i v}} \tau(a) \right) \tau(u_i, v)^{-1} \left(\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{vu_i}} \tau(a') \right). \quad (7)$$

ただし, $L(u, v)T(u, v)^{-1}J(u, v)K(u, v)$ は対角行列である.

ここで, $u, v \in V$ に対して $T(u, v) = \begin{cases} \tau(u, v)I & (1), (2) \text{ の場合} \\ \tau(u, v)I_k \oplus \tau(v, u)I_l & (3) \text{ の場合} \end{cases}$ と定義し直す. すると, 式 (4), (5), (6) より

$$\sum_{u, v \in V} L(u, v)T(u, v)^{-1}K(u, v) = A_{\Delta}^{\theta^{MS}},$$

式 (7) より

$$\sum_{\substack{u,v \in V, u \neq v, \\ \mathfrak{A}_{uv}, \mathfrak{A}_{vu} \neq \emptyset}} L(u,v)T(u,v)^{-1}J(u,v)K(u,v) = D_{\Delta}^{\theta^{MS}}$$

が成り立つ。したがって,

$$L(I + tJ)^{-1}K = A_{\Delta}^{\theta^{MS}} - tD_{\Delta}^{\theta^{MS}}$$

となることがわかる。以上より, 定理 2 が成り立つ。

参考文献

- [1] Y. Ihara. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18(3):219–235, 1966.
- [2] N. Konno, H. Mitsuhashi, and I. Sato. The quaternionic weighted zeta function of a graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 44(3):729–755, 2016.
- [3] N. Konno and I. Sato. On the relation between quantum walks and zeta functions. *Quantum Information Processing*, 11(2):341–349, 2012.
- [4] H. Mizuno and I. Sato. Weighted zeta functions of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 91(2):169–183, 2004.
- [5] E. Study. Zur theorie der linearen gleichungen. *Acta Mathematica*, 42(0):1–61, 1920.