

符号変化する積分核を有する時間発展方程式における 進行波解の存在について

榮伸一郎^{*} Jong-Shenq Guo[†] ○石井宙志[‡] Chin-Chin Wu[§]

概要

近年、対象からの距離によって働きを変える非局所相互作用を持つ数理モデルが、物質科学やパターン形成問題などの分野で提案されている。この非局所相互作用は、適切な積分核との空間方向における合成積によって定式化されており、その数理モデルは積分微分方程式として記述されている。本講演では、符号変化する積分核と単安定な非線形項を持つ時間発展方程式に対して、進行波解の存在に関する結果を紹介する。

1 はじめに

反応拡散方程式は物質間の「反応」と物質の「拡散」の相互作用に着目した方程式であり、生物や化学の数理モデリングでよく用いられる。単独の反応拡散方程式の例として、以下が挙げられる。

$$u_t = du_{xx} + f(u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

ここで、 $u = u(t, x)$ は時刻 t 、位置 x における何らかの濃度や密度などを表すものとし、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は適切な非線形関数とする。 u_{xx} は物質が拡散していく効果を表しており、 $d > 0$ は拡散係数、 $f(u)$ は物質の時間経過によって生じる自然分解や、物質の増殖とそれに伴い物質が飽和していく効果などを表す、物質の反応の効果を表している。近年ではこのような反応拡散方程式の拡張として、対象からの距離によって働きを変える「非局所相互作用」を方程式に加えた数理モデルが提案されている。例えば、拡散を広い枠組みで捉えるために非局所拡散が提案されている [2]。

$$u_t = K * u - \alpha u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

ここで、 $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \ni K$ の非負の偶関数であり、 $\alpha := \int_{\mathbb{R}} K(x) dx$ と定め、

$$K * u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} K(y) u(t, x - y) dy$$

とする。特に $\alpha = 1$ のとき、 $K(x - y)$ は単位時間に物質が位置 y から位置 x に移動する確率密度を表しており、 $K * u(x)$ は単位時間にすべての位置から位置 x に移動してきた物質の濃度を表してい

^{*} Shin-Ichiro EI, 北海道大学大学院 理学研究院 数学部門

[†] Tamkang University (台湾)

[‡] Hiroshi ISHII, 北海道大学大学院 理学院 数学専攻, E-mail: hiroshi-ishii@eis.hokudai.ac.jp

[§] National Chung Hsing University (台湾)

る．非局所拡散と拡散の関係性について， $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}K(\frac{x}{\varepsilon})$ とおくと，形式的に

$$\begin{aligned} K_\varepsilon * u(x) &= \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(y)u(x-y)dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(z)u(x-\varepsilon z)dz, \text{ (変数変換 } y = \varepsilon z \text{ より)}, \\ &= \alpha u(x) + \varepsilon^2 du_{xx}(x) + O(\varepsilon^3), \text{ (}\varepsilon = 0 \text{ におけるテイラー展開より)} \end{aligned}$$

を得る，ここで $d := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z)dz$ とおいた．したがって，何らかの意味で

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(K_\varepsilon * u(x) - \alpha u(x)) \rightarrow du_{xx}(x), \text{ (}\varepsilon \rightarrow 0\text{)}$$

をみたすことが期待される．また，方程式 (2) の解の漸近挙動についても，両辺にフーリエ変換 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$ をしたとき，

$$\hat{u}_t = (\hat{K}(\xi) - \alpha)\hat{u} \Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = e^{t(\hat{K}(\xi) - \alpha)}\hat{u}(0, \xi)$$

を得る．ここで， K は非負の連続な可積分関数であるから， $|\hat{K}(\xi)| < \hat{K}(0) = \alpha$ ($\xi \neq 0$) なので，拡散方程式のときのように解が減衰していく様子が期待できる．これらの形式的考察の数学的な正当性については，[2, 4] などを参照していただきたい．

$K \geq 0$ のときには，方程式 (2) の解は拡散方程式のときと同様に解が減衰していき，定数に収束することが報告されているが， K が符号変化するときには $\hat{K}(\xi) > \alpha$ となる $\xi \in \mathbb{R}$ が存在することも起こりうるため，積分核の形状によっては Turing 不安定性のようなメカニズムが現れることが予想される．ここで以下に挙げる，2017 年にパターン形成問題の分野において提案された KT モデル (Kernel-based Turing model) では，そのような性質からパターンが生じると考えられている [7]．

$$u_t = f(K * u) - \alpha u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \in [0, R], \\ R, & u > R. \end{cases} \quad (3)$$

方程式 (2) は線形の方程式であるため，数値計算の際に値が発散しないように，方程式 (3) には非線形項 f が加えられている．[7] では，方程式 (3) の積分核 K の形状を変えることによって，動物や魚の表皮に表れる，ストライプやスポット，迷路パターンが再現できることが報告されている．また，この研究を動機として積分核の形状とパターンの関係性を考察するために，反応拡散方程式による非局所相互作用の近似手法 [9, 10] や反応拡散ネットワークからパターンを決定する本質的積分核の導出 [6] などの研究がなされている．

物質科学における相分離現象の数値モデルでも，符号変化する積分核を用いた数値モデルが提案されている [3, 4]．例えば，物質の位置 x において，状態 A と状態 B の 2 つの状態が存在するとする．このとき， $u = u(t, x)$ を時刻 t ，位置 x における状態変数と捉え，内部エネルギーが非局所的に相互作用していると仮定したときには，以下のヘルムホルツの自由エネルギー $E(u)$ が導出される．

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(x-y)(u(x) - u(y))^2 dx dy + \int_{\mathbb{R}} W(u(x)) dx, \quad (4)$$

ここで， W は 2 重井戸型のポテンシャルであり， K は位置 x における状態 $p \in \{A, B\}$ ，位置 y における状態 $q \in \{A, B\}$ における相互作用を $K_{pq}(x-y) \geq 0$ とすると， $K = K_{AA} + K_{BB} - 2K_{AB}$

として与えられる．積分核 K の与え方より，符号変化することも自然に起こりうることに注意する．このエネルギー (4) の L^2 勾配流として得られる以下の方程式は，定常解，進行波解の存在，特に不連続で非単調な定常解の存在が知られている [4]．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K * u - \alpha u - W'(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

また，方程式に拡散項を加えたときには詳細な数値解析が行われており，非単調な進行波解や周期的な定常解が現れること [11] が報告されている．

上述したように符号変化する積分核を有する時間発展方程式の解は，単独の方程式であっても複雑な挙動を持つことが報告されており，パターンの形成過程を理解するためにも方程式の解析は重要な作業である．しかし，積分核が負の部分を持つことにより，方程式の解析が困難になることがしばしばある．例えば，符号変化する積分核を有する方程式の多くは，比較原理を持たないため解の非負性や単調性が保証されていないこと，常微分の意味で安定な平衡点が偏微分の意味では不安定になることが挙げられる [11]．

我々は積分核が符号変化するときの方程式の解析手法の構築を動機として，符号変化を伴う積分核と平衡点を持つ非線形項を持つ時間発展方程式について考える．本研究では，特に不安定な平衡点から常微分の意味で安定な平衡点を繋ぐ進行波解について，符号変化する積分核を有する方程式でも対応可能な進行波解の存在を示す手法を構築し，その手法から進行波解の存在を示すことができた．以降は，本研究の問題設定，および得られた主結果と証明のアイデアを紹介する．

2 問題設定

本稿では，方程式 (1) の拡散の効果を非局所拡散に変えたとき，または (4) の L^2 勾配流として得られる，以下の方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K * u - \alpha u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

また，本稿を通して積分核 K に関して次の条件を課す．

$$\begin{cases} C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \ni K \neq 0, K(x) = K(-x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \alpha := \int_{\mathbb{R}} K(y) dy \geq 0, \\ \text{任意の } \lambda > 0 \text{ に対して, } \int_{\mathbb{R}} |K(y)| e^{-\lambda y} dy < \infty. \end{cases} \quad (6)$$

2 段目の仮定について，積分核が多項式減衰するようなものは除外し，積分核がコンパクトな台を持つ関数や $Ae^{-ax^2} - Be^{-bx^2}$ (A, B, a, b は正定数) のようなものを考えている．さらに，非線形項 f は次の条件をみたすものとする．

$$\begin{cases} f : \text{局所 Lipschitz 連続関数, } f(0) = f(1) = 0, f < 0 \text{ in } (1, \infty), f > 0 \text{ in } (0, 1), \\ f \text{ は } u = 0 \text{ で微分可能であり, } f'(0) > 0. \end{cases} \quad (7)$$

この f の仮定より，方程式 (5) に対して $u = 0$ は不安定， $u = 1$ は常微分の意味で安定である．

本稿では方程式 (5) における，波形 ϕ を保ったまま一定速度 c で進行する進行波解 $u(t, x) = \phi(x + ct) = \phi(\xi)$ の存在について考える．

$$c\phi'(\xi) = (K * \phi)(\xi) - \alpha\phi(\xi) + f(\phi(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

特に、本研究では不安定な平衡点 0 に繋がる非自明な進行波解についての解析を行った。

$$\begin{cases} c\phi'(\xi) = (K * \phi)(\xi) - \alpha\phi(\xi) + f(\phi(\xi)), & \xi \in \mathbb{R}, \\ \phi(-\infty) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

以下の仮定をみたす非線形項 f に対して、(9) をみたす進行波解の存在が知られている。

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0, f > 0 \text{ in } (0, 1), f'(0) > 0, f'(1) < 0, \\ \exists M > 0, \exists p \in (0, 1] \text{ s.t. } -Mu^{1+p} \leq f(u) - f'(0)u \leq 0, \text{ in } (0, 1). \end{cases} \quad (10)$$

定理 2.1 [5, 12, 13]

$K \geq 0$, (6), (10) を仮定する。このとき、ある速度 c_Q に対して、 $c \geq c_Q$ のときには (9), $\phi(+\infty) = 1$ をみたす単調増加な波形 ϕ が存在する。 $c < c_Q$ のときには、そのような波形 ϕ は存在しない。また、 c_Q は以下のように特徴づけされる。

$$c_Q = \inf_{\lambda \in (0, +\infty)} \frac{Q(\lambda)}{\lambda} > 0, \quad Q(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} K(y)e^{-\lambda y} dy - \alpha + f'(0). \quad (11)$$

$Q(\lambda)$ は $\lambda > 0$ について狭義凸関数であることが容易に示せるため、 c_Q は Well-defined であることに注意する。この c_Q の導出に関して、 $\phi(\xi) \rightarrow e^{\lambda\xi}$, ($\xi \rightarrow -\infty$) と仮定したとき、形式的に方程式 (8) は

$$c\lambda e^{\lambda\xi} = \int_{\mathbb{R}} K(y)e^{\lambda(\xi-y)} dy - \alpha e^{\lambda\xi} + f'(0)e^{\lambda\xi} = Q(\lambda)e^{\lambda\xi}, \quad (\xi \rightarrow -\infty) \quad (12)$$

と計算できるため、指数減衰の度合い λ と速度 c は $c\lambda = Q(\lambda)$ をみたすことが推測される。したがって c_Q の解釈として、与えられた速度 c に対して λ が存在するための条件と考えられる。

積分核が非負のときには、方程式 (5) は比較原理を持つこともあり、非負で単調な優解と非負の劣解を構成することにより、適切な写像を用いて単調な関数列を構成する手法で進行波解の存在が示されている。しかし、符号変化する積分核のときには、一般に方程式 (5) は比較原理を持たないため、このような手法は直ちに適用できないことに注意する。

3 主結果

この章以降、積分核 K は負の部分を持つものとする。すなわち、積分核の正の部分 $K^+(x) := \max\{K(x), 0\}$ と負の部分 $K^-(x) := \max\{-K(x), 0\}$ と定めたとき、 $K^- \not\equiv 0$ とする。

まず、次の 2 つの量を定義する。

$$c_Q = \inf_{\lambda \in (0, \hat{\lambda})} \frac{Q(\lambda)}{\lambda}, \quad Q(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} K(y)e^{-\lambda y} dy - \alpha + f'(0), \quad (13)$$

$$c_R := \inf_{\lambda \in (0, \infty)} \frac{R(\lambda)}{\lambda}, \quad R(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} |K(y)|e^{-\lambda y} dy - \alpha + f'(0), \quad (14)$$

ここで $\hat{\lambda}$ は、 $Q(\lambda) = 0$ となる $\lambda > 0$ が存在すれば、 $\hat{\lambda} := \min\{\lambda > 0 \mid Q(\lambda) = 0\}$ として $c_Q = 0$ 、もし存在しなければ $\hat{\lambda} := +\infty$ とする。このとき、 $c_R > c_Q$ である。

注意 3.1 もし K が十分小さい負の部分を持つ場合でも, $c_Q = 0$ となることがある. 例えば,

$$K(x) = (1 + \varepsilon)J(x) - \frac{\varepsilon}{2}(J(x-1) + J(x+1))$$

とおく, ただし $\varepsilon > 0$ であり, $J \in C_0(\mathbb{R})$ は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上に台を持つ積分量が 1 の非負の偶関数とする. このとき, $\alpha = 1$ であり, 簡単のため $f'(0) = 1$ とおくと,

$$Q(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} K(y)e^{-\lambda y} dy = \{1 + \varepsilon - \varepsilon \cosh(\lambda)\} \int_{\mathbb{R}} J(y)e^{-\lambda y} dy$$

である. よって, $\int_{\mathbb{R}} J(y)e^{-\lambda y} dy$ は任意の $\lambda > 0$ に対して正なので, $\varepsilon > 0$ のときには $\hat{\lambda} = \cosh^{-1}(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}) < \infty$ なので $c_Q = 0$ となる.

また, $c > c_R$ のとき

$$\lambda_Q(c) := \min\{\lambda > 0 \mid c\lambda = Q(\lambda)\}, \quad \lambda_R(c) := \min\{\lambda > 0 \mid c\lambda = R(\lambda)\}$$

と定める. このとき, 容易に $\lambda_R(c) > \lambda_Q(c)$ であることが示せる. (12) で行った考察から, 波形の平行移動の自由度を除いた, 以下の条件を加える.

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi)e^{-\lambda_Q(c)\xi} = 1. \quad (15)$$

仮定 3.2 積分核 K と非線形項 f は (6), (7) をみだし, かつある $\eta \in (0, 1)$, $u^+ \geq 1$ が存在して,

$$\begin{cases} f(u) = f'(0)u, & u \in [0, \eta], \\ f(u) \leq f'(0)u, & u \in [0, u^+] \end{cases}$$

をみたす. また, $f'(0) > \alpha$ であり, $\delta \in (1, u^+)$ に対して K^- は次をみたす.

$$\int_{\mathbb{R}} K^-(y) dy \leq \min \left\{ \frac{-f(\delta)}{\delta}, \frac{(f'(0) - \alpha)\eta}{\delta} \right\},$$

例 3.3 f を

$$f(u) = \begin{cases} 1 - u, & u \in (\frac{1}{2}, +\infty), \\ u, & u \in (-\infty, \frac{1}{2}] \end{cases},$$

として与え, $\alpha = 0$ とする. このとき, $u^+ = +\infty$ と取れるので,

$$\frac{-f(\delta)}{\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta}, \quad \frac{(f'(0) - \alpha)\eta}{\delta} = \frac{1}{2\delta}$$

であるから, $\delta = \frac{3}{2}$ として置くことで

$$\int_{\mathbb{R}} K^+(y) dy = \int_{\mathbb{R}} K^-(y) dy \leq \frac{1}{3}$$

をみたす積分核であれば仮定 3.2 をみたす.

この仮定に対して, 我々は以下の結果を得た.

定理 3.4 非線形項 f と積分核 K は仮定 3.2 をみたすとする. このとき, すべての $c > c_R$ に対して (9), (15) かつ

$$\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) > 0 \quad (16)$$

をみたす $\phi > 0$ が存在する.

また, 適切な速度を持つ進行波解に限り, 定理 3.4 で得た波形に対して右方向の収束に関する結果が得られた.

系 3.5 非線形項 f と積分核 K は仮定 3.2 をみたすとする. また, $f \in C^1$ とする. このとき, すべての $c > \max\{c_R, c_K\}$ に対して (9), (15) かつ $\phi(+\infty) = 1$ をみたす $\phi > 0$ が存在する, ただし,

$$c_K := \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} |K(y)| dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}} y^2 |K(y)| dy\right)}.$$

4 証明のアイデア

4.1 Upper-lower solution method

この節では, 進行波解の存在証明に用いた upper-lower solution method のアイデアを紹介する. まず, 与えられた $c > 0$ に対して (8) の upper-lower solution を導入する.

定義 4.1 $c > 0$ に対して, 連続関数の組 $\{\bar{\phi}, \underline{\phi}\}$ が (8) の upper-lower solution であるとは,

$$c\bar{\phi}'(\xi) \geq (K^+ * \bar{\phi})(\xi) - (K^- * \underline{\phi})(\xi) - \alpha\bar{\phi}(\xi) + f(\bar{\phi}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus A, \quad (17)$$

$$c\underline{\phi}'(\xi) \leq (K^+ * \underline{\phi})(\xi) - (K^- * \bar{\phi})(\xi) - \alpha\underline{\phi}(\xi) + f(\underline{\phi}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus A, \quad (18)$$

が成り立つことである, ただし $A \subset \mathbb{R}$ はある有限集合とする.

積分核が符号変化することによって, (17) では $K^- * \underline{\phi}$, (18) には $K^- * \bar{\phi}$ が含まれており, 各不等式は 1 つの関数で閉じていないことに注意する. 今, $\kappa := \max \left\{ \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \mid u, v \in [0, u^+] \right\}$ とおく. また, 以下の積分作用素 P を導入する.

$$P[z](\xi) := \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-(\alpha+\kappa)(\xi-y)/c} [(K^+ * z)(y) + \kappa z(y) + f(z(y))] dy. \quad (19)$$

ここで, $P[z]$ を微分すると

$$\frac{d}{d\xi} P[z](\xi) = \frac{1}{c} \{(K^+ * z)(\xi) + \kappa z(\xi) + f(z(\xi))\} - \frac{\kappa + \alpha}{c} P[z](\xi)$$

を得る. これより, ϕ が P の不動点であることと ϕ が (8) をみたすことが同値であることがわかる. ここで, $[0, u^+]$ 上で値を取り, $\underline{\phi} \leq \bar{\phi}$ をみたす upper-lower solution $\{\bar{\phi}, \underline{\phi}\}$ が存在すると仮定する. このとき, $\Gamma := \{\psi \in C(\mathbb{R}) \mid \underline{\phi} \leq \psi \leq \bar{\phi}\}$ とおくと, $z \in \Gamma$ に対して,

$$\begin{aligned} P[z](\xi) &\leq \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-(\alpha+\kappa)(\xi-y)/c} [(K^+ * \bar{\phi})(y) - (K^- * \underline{\phi})(y) + \kappa\bar{\phi}(y) + f(\bar{\phi}(y))] dy, \\ &\leq \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-(\alpha+\kappa)(\xi-y)/c} [c\bar{\phi}'(y) + (\alpha + \kappa)\bar{\phi}(y)] dy = \bar{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

同様に、 $P[z](\xi) \geq \underline{\phi}(\xi)$ が得られるため、 $P: \Gamma \rightarrow \Gamma$ である。シャウダーの不動点定理を適用するために、 $P: \Gamma \rightarrow \Gamma$ が適切なノルムのもとでコンパクト作用素であることを示すのだが、その部分に関しては [8] を参照されたい。これらの議論から、以下の命題が導かれる。

命題 4.2 $c > 0$ に対して、 $[0, u^+]$ 上に値を取り $\mathbb{R}$ 上で $\underline{\phi} \leq \bar{\phi}$ をみたす、upper-lower solution $\{\bar{\phi}, \underline{\phi}\}$ が存在すると仮定する。このとき、(8) は解 ϕ を持ち、 $\mathbb{R}$ 上で $\underline{\phi} \leq \phi \leq \bar{\phi}$ をみたす。

したがって、 $c > 0$ に対して適切な upper-lower solution を構成することで、進行波解の存在を示すことができる。以下の upper-lower-solution によって、定理 3.4 が得られる。

補題 4.3 非線形項 f と積分核 K は仮定 3.2 を満たすとする。このとき $c > c_R$ に対して、次の $\{\bar{\phi}, \underline{\phi}\}$ は (8) の upper-lower-solution である。

$$\bar{\phi}(\xi) = \min\{e^{\lambda_Q(c)\xi} + he^{\lambda_R(c)\xi}, \delta\}, \quad \underline{\phi}(\xi) = \begin{cases} e^{\lambda_Q(c)\xi} - he^{\lambda_R(c)\xi}, & \xi \leq \xi_M, \\ \eta, & \xi \geq \xi_M. \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 ξ_M は $e^{\lambda_Q(c)\xi} - he^{\lambda_R(c)\xi}$ が最大値を取る点とし、 h は $e^{\lambda_Q(c)\xi_M} - he^{\lambda_R(c)\xi_M} = \eta$ を満たす定数である。

4.2 進行波解の無限遠方における極限

この節では、 L^2 -estimate に基づいた進行波解の無限遠方における極限の解析手法について紹介する。まず、次の関数空間を用意する。

$$C_b^2(\mathbb{R}) := \left\{ g \in C^2(\mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |g^{(j)}(x)| < \infty, j = 0, 1, 2 \right\}.$$

今、 ϕ を (8) をみたす $\mathbb{R}$ 上有界で連続な波形とする。このとき、方程式 (8) より ϕ' も $\mathbb{R}$ 上有界な連続関数である。もし $f \in C^1$ であるとき、(8) を微分することにより、 ϕ'' も $\mathbb{R}$ 上有界な連続関数であることが示せる。よって、 $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ 。このような状況下で、[1] を参考にした L^2 -estimate として、 ϕ' に関する以下の結果を得た。

補題 4.4 $(c, \phi) \in \mathbb{R} \times C_b^2(\mathbb{R})$ を (8) をみたす解とする。また、 $|c| > c_K$ と仮定する。このとき、 $\phi' \in L^2(\mathbb{R})$ であり、 $\phi'(\pm\infty) = 0$ である。

この補題から、十分速い滑らかな進行波解は、アスコリ-アルツェラの定理とソボレフの埋め込み定理を用いた議論により、 ϕ の無限遠方の集積点 l は $f(l) = 0$ をみたすことが示せる。したがって、 ϕ の無限遠方における極限の結果として以下の命題が従い、系 3.5 が得られる。

命題 4.5 $(c, \phi) \in \mathbb{R} \times C_b^2(\mathbb{R})$ を (8) をみたす解とする。また、 $|c| > c_K$ かつ

$$\left\{ u \in \left[\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi), \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \phi(\xi) \right] \mid f(u) = 0 \right\} = \{0, 1\}$$

と仮定する。このとき、 $\phi(\pm\infty)$ は存在し、その値は 0 か 1 である。

参考文献

- [1] M. ALFARO, J. COVILLE, *Rapid traveling waves in the nonlocal Fisher equation connect two unstable states*, Applied Mathematics Letters, **25** (2012), 2095-2099.
- [2] F. ANDREU-VAILLO, J. MAZÓN, J. ROSSI, J. TOLEDO-MELERO, *Nonlocal diffusion problems*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, **165** (2010).
- [3] P. BATES, *On some nonlocal evolution equations arising in materials science*, In: Nonlinear dynamics and evolution equations (Ed. by H. Brunner, X. Zhao and X. Zou), Fields Inst. Commun., AMS, Providence, **48** (2006), 13-52.
- [4] P.W. BATES, X. CHEN, A.J.J. CHMAJ, *Heteroclinic solutions of a van der Waals model with indefinite nonlocal interactions*, Calc. Var., **24** (2005), 261-281.
- [5] J. COVILLE, L. DUPAIGNE, *On a non-local equation arising in population dynamics*, Proc. of Roy. Soc. of Edin., **137A** (2007), 727-755.
- [6] S.-I. EI, H. ISHII, S. KONDO, T. MIURA, Y. TANAKA, *Effective nonlocal kernels on reaction-diffusion networks*, preprint.
- [7] S. KONDO, *An updated kernel-based Turing model for studying the mechanisms of biological pattern formation*, J. Theoretical Biology, **414** (2017), 120-127.
- [8] S. MA, *Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem*, J. Differential Equations, **171** (2001), 294-314.
- [9] H. NINOMIYA, Y. TANAKA, H. YAMAMOTO, *Reaction, diffusion and non-local interaction*, J. Math. Biol. **75** (2017), 1203-1233.
- [10] H. NINOMIYA, Y. TANAKA, H. YAMAMOTO, *Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials*, Japan J. Indust. Appl. Math. **35** (2018), 613-651.
- [11] J. SIEBERT, E. SCHOLL, *Front and turing patterns induced by mexican-hat-like nonlocal feedback*, Europhys. Lett. **109**, 40014, (2015) .
- [12] Y.-J. SUN, W.-T. LI, Z.-C. WANG, *Traveling waves for a nonlocal anisotropic dispersal equation with monostable nonlinearity*, Nonlinear Analysis, **74** (2011), 814-826.
- [13] H. YAGISITA, *Existence and nonexistence of travelling waves for a nonlocal monostable equation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **45** (2009), 925-953.