

Riemann ゼータ関数の臨界線上の値分布について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻

井上 翔太 (Shōta INOUE)

概要

本稿では Riemann ゼータ関数の臨界線上での値分布について論じる。Riemann ゼータ関数の臨界線上での振る舞いはよく知られた Lindelöf 予想などの素数と関わり合いのある重要な未解決問題があり、重要な研究テーマである。本稿の内容はこの値分布に関する先行研究の紹介とどのような問題が未解決として残っているのかを紹介することが主である。そして、本稿の締めくくりとして、最近の値分布での筆者の研究結果を報告し、ごく簡単に証明のアイデアを述べる。

1 導入

本稿では Riemann ゼータ関数の臨界線上での値分布について論じる。良く知られた Riemann ゼータ関数は以下の級数で定義される複素有理型関数である。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

この定義級数は s の実部が 1 より大きい場合でしか収束しないが、この関数が $\mathbb{C}$ 上に有理型関数として解析接続されてることは良く知られた事実である。以下、 $s \in \mathbb{C}$ とし、その実部を σ 、虚部を t とする。また、 ε は任意の正の定数とする。この関数は素数分布と関係があり、その観点から多くの研究がされている。特に、Riemann 予想 (RH) や本原稿で論じる Lindelöf 予想は解析的整数論における大きな未解決問題である。

予想 (Lindelöf 予想). 任意の実数 $t \geq 1$ に対して、

$$\zeta(1/2 + it) = O_{\varepsilon}(t^{\varepsilon}). \quad (1.1)$$

ここで、上記の記号 O はよく知られた Landau の記号で O の添え字は O -定数が添え字に依存してもよいことを意味する。また、Riemann 予想が正しいならば Lindelöf 予想が正しいことも知られている事実である。この予想に関しては素数の間隔に関する問題や $\zeta(s)$ の零点分布に対しての応用があることが知られている。例えば、Lindelöf 予想が正しければ以下の評価

$$p_{n+1} - p_n = O_{\varepsilon}(p_n^{1/2+\varepsilon})$$

を得ることができる。ここで、 p_n は n 番目の素数である。

Lindelöf 予想に対する同値命題は現在ではいくつか知られている。特に、本稿と関りの強い次の同値命題をここで紹介する。

命題 1. 任意の $T \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, 以下の評価が成り立つことと Lindelöf 予想は同値である.

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = O_{k,\varepsilon}(T^{1+\varepsilon}). \quad (1.2)$$

今, 上記の不等式 (1.2) は Riemann ゼータ関数の“積分平均”を考えていることに注意したい. 一般的にある対象を調べるうえで個々の振る舞いを調べるよりも, 積分や部分和などのある種の平均を考えることは問題を調べやすくする方法の一つであろう. 特に, 難しい対象を調べる際の最初の手掛かりを見出す際に, これらのような平均を考えることは我々に重要な観察を与えてくれることがある. 一方で, 命題 1 は Lindelöf 予想のような $\zeta(1/2 + it)$ の各 t に対する個別の評価は高冪の積分の評価から復元されることを意味している. この意味で, 上記の積分は Lindelöf 予想を考える際に非常に重要な情報を我々に与えるものであり, 調べる価値のある重要な対象である. しかし, 現状でも Lindelöf 予想が難問として残っていることから上記の積分を調べることもまた容易でないことに読者は気づくであろう. 実際に, この積分はここ最近でも活発に研究されている対象であり, 未だに多くの謎に包まれている対象である.

最近発達しているゼータ関数の値分布の研究方法の一つとして, “確率論的モデル”で $\zeta(s)$ を置き換え, 直接的な結果を得るのではなくこの関数たちの挙動の手掛かりを掴むという研究がある. この方法での研究は驚くべき観察を我々に与えることがある. その例として, Keating-Snaith [11] らと Farmer-Gonek-Hughes [1] らによる以下の予想を紹介しよう.

予想 (Keating-Snaith, 2000 年). 任意の実数 $k > -1/2$ に対して,

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt \sim C_k T (\log T)^{k^2}. \quad (1.3)$$

ただし, 定数 C_k は

$$C_k = \frac{(G(1+k))^2}{G(1+2k)} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+m)}{m! \Gamma(k)} \right)^2 p^{-m} \right) \right\}$$

であり, Γ はガンマ関数, G は Barnes G -関数である.

予想 (Farmer-Gonek-Hughes, 2007 年).

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = \exp \left((1 + o(1)) \sqrt{\frac{1}{2} \log T \log \log T} \right), \quad T \rightarrow +\infty. \quad (1.4)$$

これらの予想は $\zeta(s)$ をある“計算可能な確率的なモデル”と対応させ, その計算から推測された. ここで, 上記の評価 (1.3), (1.4) は Lindelöf 予想の評価 (1.2), (1.1) をそれぞれ精密にしたものであることに注意したい. 実際に, 初等的な事実として $(\log T)^{k^2} = O_{k,\varepsilon}(T^\varepsilon)$ や (1.4) の右辺が $= O_\varepsilon(T^\varepsilon)$ であることは簡単に確かめることができる.

2 先行研究

前節で我々は Riemann ゼータ関数の臨界線上での値分布の研究についての背景や動機を簡単に概観した. 本節ではこのテーマに関する先行研究を概観することにしよう.

まず, 漸近式 (1.3) に対する先行研究を紹介する. この漸近式の証明は非常に困難で, 自明な場合である $k = 0$ の場合を除いては以下の Hardy-Littlewood [3] の 1918 年の $k = 1$ に関する結果及び, Ingham [8] の 1927 年の $k = 2$ に関する結果しか知られていない.

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2 + it)|^2 dt \sim T \log T, \quad \int_T^{2T} |\zeta(1/2 + it)|^4 dt \sim \frac{1}{2\pi^2} T (\log T)^4.$$

これら二つの漸近式は証明されてから約 100 年が経過しているが, (1.3) のような漸近式は現在この二つの場合を除くと全く証明されていない. 特に, これは Riemann 予想を仮定した場合であったとしても知られていない. そのため, 仮に Riemann 予想を仮定して上記の以外の場合での漸近式を証明することができればそれは重要な研究となる. 一方で, この問題を以下のような不等式 (A), (B) を証明するという問題に簡易化して考えるといくつかの結果が知られている.

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt \geq a_k T (\log T)^{k^2}, \quad (A)$$

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt \leq b_k T (\log T)^{k^2}. \quad (B)$$

ただし, a_k, b_k は k のみに依存する正のある定数である.

注意 1. 上記の (A), (B) はこれらの定数の存在性のみに注目していることに注意したい. つまり, 以下 (A), (B) が正しいということを主張するときは a_k, b_k が k のみに依存する定数であり, T に依存しなければどんな大きさの正の定数であってもよい. つまり k 依存に対してはかなり評価として悪い状況がある.

この状況で不等式 (A) については次の結果たちが知られている.

定理. 不等式 (A) が以下の状況で成り立つ:

- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, (Ramachandra [15], [16], 1978-1980 年),
- $k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, (Heath-Brown [6], 1981 年),
- $\text{RH} \implies k \geq 0$, (Ramachandra [17], 1980 年, Heath-Brown [6], 1981 年 (独立)),
- $k \geq 1$, (Radziwiłł-Soundararajan [14], 2013 年)

このように, 不等式 (A) に関しては $-1/2 < k < 0$, $k \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ の場合を除いて解決している. 特に, (A) は Riemann 予想を仮定すれば全ての非負実数 k で解決している.

不等式 (B) については (A) よりも現状では難しい問題である. 一方で, 最近不等式 (B) に対する大きな発展がいくつかあり, その発展のブレイクスルーとなった Soundararajan [20] による次の結果を紹介しよう.

定理 (Soundararajan, 2009 年). Riemann 予想が正しいとする. このとき, 任意の $k > 0$ に対して,

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt = O_{k,\varepsilon} \left(T (\log T)^{k^2 + \varepsilon} \right) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

この結果の著しい点は ε という僅かな違いを除いて、 $(\log T)^{k^2}$ という要素を明示的に導出したところである。この結果以前では以下で紹介するように $0 \leq k \leq 2$ の場合を除いて要素 $(\log T)^{k^2}$ を取り出すことはたとえ Riemann 予想を仮定したとしても長年できていなかった。そのため、上記の結果はこの要素を k が 2 より大の場合に初めて導出し、尚かつ 2 以上全ての k についてそれを成功させた大変驚くべきものだったのである。さて、この結果を踏まえた上で不等式 (B) の先行研究を紹介しよう。

定理. 不等式 (B) は以下の状況で成り立つ:

- $k = \frac{1}{2}$, (Ramachandra [17], 1980 年),
- $k = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, (Heath-Brown [6], 1981 年),
- $\text{RH} \implies 0 \leq k \leq 2$, (Ramachandra [17], 1980 年, Heath-Brown [6], 1981 年 (独立)),
- $\text{RH} \implies 0 \leq k \leq 2 + \frac{2}{11}$, (Radziwiłł [13], 2011 年),
- $\text{RH} \implies k \geq 0$, (Harper [4], 2013 年)
- $0 \leq k \leq 2$, (Heap-Radziwiłł-Soundararajan [5]).

以上の先行結果から実は不等式 (B) は Harper により、Riemann 予想下であれば $k \geq 0$ のときは既に解決している。これも著しい結果の一つであろう。一方で、Riemann 予想の仮定無しでは直近の研究でも k が 2 より大きい場合に関しては (B) を証明することはできておらず、難しい問題として残っているのである。特に、上記の注意 1 で述べたが上記の不等式 (B) の b_k は Keating-Snaith の予想の C_k とギャップがある場合を今は無視している。そして、現在の Harper の Riemann 予想下での評価に現れる b_k は Keating-Snaith の C_k とは大きなギャップがある。そして、この k 依存の定数たちも $\zeta(s)$ の平均値に関する結果を個別の評価へ応用する際には重要な要素となる。そのため、Harper による上記の結果が証明された現状でも、Riemann 予想下の研究として b_k の評価をより鋭くするという問題は重要な研究対象として残っているのである。

3 問題

以上の節で Riemann ゼータ関数の値分布に関する予想とそれに関わる研究の歴史について概観した。この節ではそれらの問題と密接に関わりのある以下の問題を考える。以下、 $\mathcal{S}(T, V)$ を以下で定義する集合とする。

$$\mathcal{S}(T, V) = \{t \in [T, 2T] \mid \log |\zeta(1/2 + it)| > V\}.$$

このとき、次の問題を考える。

問題 1. パラメータ T を十分な大な数とする。このとき、 V を T に依存したパラメータとして考えたとき以下の不等式はどのような範囲の V で成り立つか？

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) = O\left(\frac{\sqrt{\log \log T}}{V} \exp\left(-\frac{V^2}{\log \log T}\right)\right). \quad (3.1)$$

ただし、 $\text{meas}(\cdot)$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を意味する。

この問題は Soundararajan [20] によって提示された。彼がこの問題を考えた背景には次の事実がある。もし、評価 (3.1) が T に依存した任意の大きさの V で成り立つとすると、以下の不等式たちを得る：

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt \leq C_1 T (\log T)^{k^2}, \quad (3.2)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \leq \exp \left(C_2 \sqrt{\log T \log \log T} \right). \quad (3.3)$$

ただし、 C_1, C_2 はある正の絶対定数である。評価 (3.1) から不等式 (3.2) が得られることは次の等式

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt = 2k \int_{-\infty}^{\infty} e^{2kV} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) dV \quad (3.4)$$

を用いて計算することでわかる。実際に Soundararajan は Riemann 予想の仮定下で $\text{meas}(\mathcal{S}(T, V))$ の上界を (3.1) の右辺よりも少し緩いもので与えることによって、評価 (2.1) を得ることに成功した。また、評価 (3.1) から不等式 (3.3) が得られることは、例えば [1] の Lemma 2.2 を用いることで証明できる。このように、評価 (3.1) を考えることは Keating-Snaith の予想や Farmer-Gonek-Hughes の予想の研究に直結する。特に、上記の不等式 (3.2) の定数 C_1 は k に依存しない絶対定数であり、これは前述した Harper の研究の改良になることから Riemann 予想の仮定下であっても問題 1 は重要な研究対象である。

上記の問題 1 は以下の Selberg の中心極限定理 [18], [19] の大偏差に関する問題だと解釈すると自然な問題となる。

定理 (Selberg の中心極限定理). パラメータ V を $\sqrt{\log \log T}$ のある定数倍で表される数とする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) &\sim \int_{\frac{V}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &\left(\sim \frac{\sqrt{\log \log T}}{V} \exp \left(-\frac{V^2}{\log \log T} \right) \right), \quad (T \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって、 V の大きさが $\sqrt{\log \log T}$ の定数倍のときの問題 1 は上記の定理に帰着される。そして“確率論の意味でこの極限の大偏差¹”を考えることで、問題 1 は自然に現れる。

4 主定理

この節で筆者の主定理を述べる。ここでの主定理は前節の問題 1 に関するものであり、それを書く前に関係のあるいくつかの先行研究を述べることにする。まず、Jutila [10] により以下の定理が 1983 年に証明された。

定理 (Jutila, 1983 年). パラメータ $T > 0$ を十分大な数とする。このとき、 V を $c_1 \sqrt{\log \log T} \leq V \leq c_2 (\log \log T)^{2/3}$ をみたす実数とすると

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) = O_{c_2} \left(\exp \left(-\frac{V^2}{\log \log T} \right) \right) \quad (4.1)$$

が成り立つ。ただし、 c_1, c_2 は任意の正の絶対定数である。

¹正確な定義は [7] を参照して頂きたい

これにより, V の範囲が $\sqrt{\log \log T}$ と $(\log \log T)^{2/3}$ の定数倍の間の範囲であれば上記のような $\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V))$ の上界を得ることができる. しかし, これは僅かに評価 3.1 に及ばない. 一方で, Radziwiłł [12] により次の定理が得られている.

定理 (Radziwiłł, 2011 年). 十分小な正の定数 δ をとる. このとき, パラメータ V を $c_1 \sqrt{\log \log T} \leq V = O\left((\log \log T)^{\frac{3}{5}-\delta}\right)$ としたとき,

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) \sim \int_{\frac{V}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}, \quad (T \rightarrow +\infty) \quad (4.2)$$

が成り立つ. 特に, 十分大な $T > 0$, $c_1 \sqrt{\log \log T} \leq V = O\left((\log \log T)^{\frac{3}{5}-\delta}\right)$ に対して,

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) \leq \frac{\sqrt{\log \log T}}{V} \exp\left(-\frac{V^2}{\log \log T}\right)$$

が成り立つ. ここで, c_1 は任意の正の定数である.

この Radziwiłł の定理により, 問題 1 の不等式は V が $c_1 \sqrt{\log \log T} \leq V = O\left((\log \log T)^{\frac{3}{5}-\delta}\right)$ のときには成り立つことがわかる. Radziwiłł は $\log \zeta(s)$ に関する Selberg-Tsang の公式 [21, Lemma 5.4] と中心極限定理の大偏差の Hwang による一般論的な結果 [7] を素数に関する Dirichlet 多項式に対して用いることで上記の定理を証明している. そして彼は, その Dirichlet 多項式の計算の結果から以下の予想を提起している.

予想 (Radziwiłł, 2011 年). パラメータ V が $c_1 \sqrt{\log \log T} \leq V = o(\log \log T)$ のとき,

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) \sim \int_{\frac{V}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}, \quad (T \rightarrow +\infty).$$

さらに, 任意に固定された定数 k に対して, $V \sim k \log \log T$ のとき,

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) \sim C_k \int_{\frac{V}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}, \quad (T \rightarrow +\infty).$$

上記の予想は Dirichlet 多項式という簡単な対象に対しては実は Radziwiłł [12, Proposition 1, 2] が証明を与えている². 一方で, Riemann ゼータ関数の振る舞いは素数に関する Dirichlet 多項式と非自明零点たちの情報によって決定されるので, 我々は非自明零点たちの情報も必要である. そして, 現状ではその非自明零点の情報を得ることは難しく, その難しさが原因となって Radziwiłł の予想は現在未解決となっている. また, この Radziwiłł の予想と Riemann 予想を仮定することで, 我々は Keating-Snaith の予想を $k \geq 0$ の場合に完全に解決することができる. 実際に, Riemann 予想下での Soundararajan の結果 [20, Theorem 1] と Radziwiłł の予想の不等式を等式 (3.4) に代入して計算することで, $k \geq 0$ の場合の漸近式 (1.3) を得る. よって, $\text{meas}(\mathcal{S}(T, V))$ の上からの評価を与える問題は重要であり, 特に “どのような T に依存した V の範囲” で (3.1) の右辺のような適切な値で上から評価をできるかということが重要な問題となる.

そして筆者は以下の結果 [9, Theorem 4] を得た.

²Proposition 2 の Radziwiłł の証明にはいくつかの修正すべき誤植があり, 本人とも直接連絡を取り議論したがまだ正しい証明は与えられていない.

定理 1 (I., 2019+). パラメータ V を $c_1\sqrt{\log \log T} \leq V \leq c_2(\log \log T)^{2/3}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) \\ & \leq (1 + o(1)) \int_V^\infty e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} + O_{c_1, c_2} \left(\frac{V}{(\log \log T)^{1/3}} \exp \left(-\frac{V^2}{2} \right) \right), \quad (T \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に, パラメータ $c_1\sqrt{\log \log T} \leq V = o((\log \log T)^{2/3})$ に対して,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left(\mathcal{S} \left(T, V \sqrt{\frac{1}{2} \log \log T} \right) \right) \leq (1 + o(1)) \int_V^\infty e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}, \quad (T \rightarrow +\infty) \quad (4.3)$$

が成り立つ. さらに, 十分大な任意の T に対して, $c_1\sqrt{\log \log T} \leq V \leq c_2(\log \log T)^{2/3}$ のとき,

$$\frac{1}{T} \text{meas}(\mathcal{S}(T, V)) = O_{c_1, c_2} \left(\frac{\sqrt{\log \log T}}{V} \exp \left(-\frac{V^2}{\log \log T} \right) \right) \quad (4.4)$$

が成り立つ. ただし, 上記の c_1, c_2 は任意の絶対定数である.

この定理の (4.4) は Jutila の評価 (4.1) の改良であり, (4.3) は Radziwiłł の予想の上からの評価を V の範囲が $c_1\sqrt{\log \log T} \leq V \leq c_2(\log \log T)^{2/3}$ であるときに解決したもので, 上からの評価に限れば Radziwiłł の上記の定理の改良にもなっている.

5 定理 1 の証明の概要

この節で定理 1 の証明のごく簡単な流れを紹介する. この定理の証明では以下の定理 [9, Theorem 1] を用いる.

定理 2 (I., 2019+). パラメータ X を $X \geq 3$ として, $w_X(n)$ を $1 \leq n \leq X$ で $w_X(n) = 1$, $X \leq n \leq X^2$ で $0 \leq w_X(n) \leq 1$ をみたすある重み関数とする. このとき, 任意の $\sigma \geq 1/2$, $t \geq 14$ に対して,

$$\begin{aligned} & \log \zeta(s) \\ & = \sum_{2 \leq n \leq X^2} \frac{\Lambda(n) w_X(n)}{n^s \log n} + \sum_{\substack{\rho \\ |s-\rho| \leq \frac{1}{\log X} \\ \zeta(\rho)=0}} \log((s-\rho) \log X) + O \left(\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma, \beta>0 \\ \zeta(\rho)=0}} \frac{X^{2(\beta-\sigma)} + X^{\beta-\sigma}}{(1+|t-\gamma| \log X)^3} \right). \end{aligned}$$

が成り立つ.

この公式は素数に関する Dirichlet 多項式と非自明零点たちで $\log \zeta(s)$ を表す Gonek-Hughes-Keating [2] の “Hybrid formula” に類似したものである. 一方で彼らの公式では定理 1 を証明するには零点の振る舞いを制御することは難しい. そこで筆者は Selberg が [18] で導入した重み関数を用いた手法と彼らの公式を組み合わせるために上記の公式を証明した.

この公式を使うことで我々は Radziwiłł が漸近式 (4.2) を証明するために用いた Selberg-Tsang の公式 [21, Lemma 5.4] では制御することができなかった, s に近い零点の寄与を $\text{meas}(\mathcal{S}(T, V))$ の上からの評価を考える場合は無視することができる. そして後は Selberg-Tsang の方法と Radziwiłł の Dirichlet 多項式の値分布に関する結果 [12, Proposition 1] を用いて残りの項を計算することで定理 1 を得る.

参考文献

- [1] D. W. Farmer, S. M. Gonek, and C. P. Hughes, The maximum size of L -functions, *J. Reine Angew. Math.* **609** (2007), 215–236.
- [2] S. M. Gonek, C. P. Hughes, and J. P. Keating, A hybrid Euler-Hadamard product for the Riemann zeta-function, *Duke Math. J.* no.3 **136** (2007), 507–549.
- [3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.* **41** (1918), 119–196.
- [4] A. J. Harper, Sharp conditional bounds for moments of the Riemann zeta function, [arXiv:1305.4618](#), 2013.
- [5] W. Heap, M. Radziwiłł, and K. Soundararajan, Sharp upper bounds for fractional moments of the Riemann zeta-function, *Q. J. Math.*, to appear.
- [6] D. R. Heath-Brown, Fractional moments of the Riemann zeta-function, *J. London Math. Soc.* **24** (1981), 65–78.
- [7] H. H. Hwang, Large deviations for combinatorial distributions. I: Central limit theorems, *Ann. Appl. Probab.*, **6** (1996), no. 1, 297–319.
- [8] A. E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (2) **27** (1927), no.4, 273–300.
- [9] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, [arXiv:1909.03643](#).
- [10] M. Jutila, On the value distribution of the zeta-function on the critical line, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 513–518.
- [11] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and L -functions at $s = 1/2$, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 91–110.
- [12] M. Radziwiłł, Large deviations in Selberg’s central limit theorem, [arXiv:1108.5092](#).
- [13] M. Radziwiłł, The 4.36th Moment of the Riemann zeta-function, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2012** (2011), 4245–4259.
- [14] M. Radziwiłł and K. Soundararajan, Continuous lower bounds for moments of zeta and L -functions, *Mathematika* **59** (2013), 119–128.
- [15] K. Ramachandra, Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series. I, *Hardy-Ramanujan J.* **1** (1978), 1–15.
- [16] K. Ramachandra, Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series. II, *Hardy-Ramanujan J.* **3** (1980), 1–24.
- [17] K. Ramachandra, Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **5** (1980), 145–158.
- [18] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, *Avhandl. Norske Vid.-Akad. Oslo I. Mat.-Naturv. Kl.*, no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 214–280.
- [19] A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory*, 367–385, 1992.
- [20] K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta-function, *Ann. of Math.* (2) **170** (2009), 981–993.
- [21] K. M. Tsang, *The distribution of the values of the Riemann zeta function*, PhD thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 1984.