

簾多様体上のトーラス作用の固定点とヤング図形

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
波多野幸平 (Kohei HATANO)

概要

ポアンカレ多項式を係数にする母関数の無限積分解は表現論的に重要な意味をつことが様々な場合において知られている．簾多様体において Hausel 氏 [7] によって無限積による表示が知られている．本研究はそこからアファイン A 型の簾多様体の場合に対してはその式がどのようなになるか研究を行ってきた．本講演では、トーラス作用の固定点とヤング図形の対応から Bialynicki-Birula cell の次元を数え上げることでアファイン A 型の簾多様体のポアンカレ多項式を計算することに成功したのでそれを紹介する．

1 導入

簾多様体とは Nakajima 氏 ([2][3]) によって導入された多様体で、その中間次数のコホモロジーの直和は Kac-Moody 代数の表現の幾何学的実現になっていることが知られている．そのため指標公式によって、その中間次数のベッチ数を係数とする母関数の無限積の表示は得られる．そこから中間次数ではなくポアンカレ多項式を係数とする母関数はどのような無限積の表示を持つかという問いが考えられる．つまり $\mathfrak{M}(v, w)$ を簾多様体を表すとして以下の無限和の良い無限積表示を考えたい．

$$\sum_{v \in \mathbb{N}^{|I|}} P_t(\mathfrak{M}(v, w)) q^v$$

例えば簾多様体の一種である $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の場合においては、ポアンカレ多項式は以下のように表示されることが知られている ([4] を参照)．

$$\sum_{\lambda: n \text{ の分割}} t^{2(n-l(\lambda))}.$$

$l(\lambda)$ は分割の長さとする．したがってこの場合は分割数の母関数の積分分解から以下の公式が得られる．

$$\sum_n P_t(\text{Hilb}(\mathbb{C}^2)) q^n = \prod_{m=1}^{\infty} 1/(1 - t^{2m-2} q^m).$$

Hausel 氏 [7] によって、一般の簾多様体の母関数の無限積表示が得られたが、そこから具体的な個別の簾多様体に対しての表示を得るのは難しい．したがって本研究は簾がアファイン A 型おける、簾多様体の母関数を無限積表示を得るのが目的であった．残念ながら無限積表示を得ることはいまだできていないがポアンカレ多項式を求めることはできた．以下では、まず簾多様体を定義し、トーラス作用の固定点とヤング図形の対応、そこからヤング図形の数え上げによりポアンカレ多項式が計算できることを紹介していく．

2 籠多様体

2.1 定義

まず籠多様体を手短に定義していく． $Q = (I, \Omega)$ を籠として， I を頂点の集合， Ω を向きつきの辺の集合とする． $\bar{\Omega}$ を Ω と逆向きの辺の集合として， $h \in \Omega$ に対して，逆向きの辺を $\bar{h} \in \bar{\Omega}$ と表して， $H = \Omega \cup \bar{\Omega}$ とする．次数付きベクトル空間 $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ ， $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ と $v = (\dim V_i)_{i \in I}$ ， $w = (\dim W_i)_{i \in I}$ に対して

$$M(v, w) = \bigoplus_{h \in H} \text{Hom}(V_{\text{out}(h)}, V_{\text{in}(h)}) \bigoplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(W_i, V_i) \bigoplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(V_i, W_i)$$

を考える．

代数群 $G = \prod_{i \in I} \text{GL}(V_i)$ の $M(v, w)$ 上の作用を

$$(g_k)_{k \in I}((B_h)_{h \in H}, (i_k)_{k \in I}, (j_k)_{k \in I}) = ((g_{\text{in}(h)} B_h g_{\text{out}(h)}^{-1}), (g_k i_k), (j_k g_k^{-1}))$$

とする．さらに M 上のシンプレクティック形式 ω を

$$\omega((B, i, j), (B', i', j')) = \sum_{h \in H} \text{tr} \epsilon(h) B_h B_{\bar{h}} + \sum_{k \in I} \text{tr}(i_k j'_k - i'_k j_k)$$

と定める．ここで $\epsilon : H \rightarrow \{\pm 1\}$ は任意の $h \in H$ にたいして $\epsilon(h) + \epsilon(\bar{h}) = 0$ を満たすものとする．定義から明らかに G の作用で不変である．さらにその moment map $\mu : M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{gl}(V_i)$ を

$$\mu(B, i, j) = \sum_{h \in \Omega} \text{tr} \epsilon(h) B_h B_{\bar{h}} + \sum_{k \in I} \text{tr}(i_k j_k - j_k i_k)$$

と定める． $\mu^{-1}(0)$ にたいしてその座標環を $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]$ とあらわすことにする．このとき $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ を $\chi((g_k)k) = \prod (\det g_k)^{-1}$ とし，さらに幾何学的商として以下の二つの多様体を定義する．

定義 1. $\mathfrak{M}_0$ と $\mathfrak{M}$ を以下のように定める．

$$\mathfrak{M}_0 = \mu^{-1}(0) // G = \text{Spec} \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$$

$$\mathfrak{M} = \mu^{-1}(0) //_{\chi} G = \text{Proj} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{G\chi^n}$$

ここで $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{G, \chi^n} = \{f \in \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)] \mid f(gx) = \chi^n(g)f(x)\}$ とする．

特に $\mathfrak{M}$ を籠多様体とよぶ．

定義から包含写像 $i : \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)] \rightarrow \bigoplus_n \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{G, \chi^n}$ による自然な射 $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_0$ が得られる．これは特異点の解消になることが期待されるが一般には不成立である．このことについてはここでは扱わない．上記の表記が一番簡潔であると思うが，実際に籠多様体を扱う場合少し扱いにくい．したがって以下の概念を用意する．

定義 2. $(B, i, j) \in \mu^{-1}(0)$ にたいして， B -invariant で $\ker j$ に含まれる V の部分空間が 0 のみになるとき， (B, i, j) を *stable* という．

この安定とは幾何学的不変式論的な意味での安定と同値であり, したがって以下の表示が得られる.

定理 3 ([3]).

$$\mathfrak{M} \simeq \{(B, i, j) \in \mu^{-1}(0) \mid (B, i, j) \text{ は } stable\} / G.$$

さらに以下のことが知られている.

定理 4 ([3]). $\mathfrak{M}$ は非特異で M から誘導されるシンプレクティック構造を持つ.

例 5. 頂点が一つで, それ自身に向かう辺が一本ある簾 Q を考える. このとき $v = n$, $w = 1$ としたときに簾多様体 $\mathfrak{M}(n, 1)$ と $\mathbb{C}^2$ 上の点のヒルベルトスキーム $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は同型になる. さらに $\mathfrak{M}_0 \simeq \mathbb{C}^{2n}/S_n$ となる. このとき *Hilbert-Chow morphism* $\pi : \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^{2n}/S_n$ は上記での意味の射 π と一致する. したがってこの場合は特異点の解消になっている.

3 ヤング図形

トーラス作用の固定点と対応をつけるためにいくつかヤング図形の coloring について説明をする.

定義 6. $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して, 任意の $s = (m, n) \in Y$ における a -coloring とは

$$\text{res}(s) = a - m + n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

と定義する. これはヤング図形の各盤に番号を振りわけける.

さらに $(Y)_k = \{s \in Y \mid \text{res}(s) = k\}$ とする. つまりヤング図形 Y のうち k と番号づけられた, 盤の集合である.

定義から明らかではあるが, ヤング図形の coloring は一つ上の盤にいけば coloring は一つ上がり, 右にいけば, coloring は一つ下がる.

定義 7. ヤング図形の l 個の組 $Y = (Y_1, \dots, Y_l)$ に対して $a = (a_1, \dots, a_l) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^l$ とする. このとき Y の a -coloring とは $s \in Y_k$ にたいして,

$$\text{res}(s) = a_k - m + n \in \mathbb{Z} - n\mathbb{Z}$$

と定義する.

さらに $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ にたいして

$$\text{wt}_k(a, Y) = \sum_i |(Y_i)_k|$$

とする. とくに $\text{wt}(a, Y) = (\text{wt}_0(a, Y), \dots, \text{wt}_{n-1}(a, Y))$ をウェイトベクトルと呼ぶ.

例 8. $(1, 2) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ にたいして, ヤング図形 $((5, 4, 1)(3, 2, 1, 1))$ の $(1, 2)$ -coloring は以下のようにあたえられる.

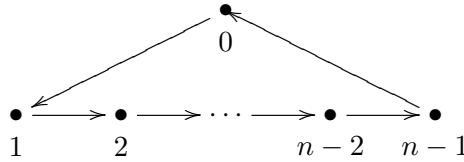
0				
4	3			
3	2			
2	1			
1	0	4		

4				
3	2			
2	1	0	4	

このときのウェイトベクトルは $(3, 3, 4, 3, 4)$ である.

4 簾多様体のトーラス固定点

ポアンカレ多項式をヤング図形の数え上げに帰着させることができたのでこの節で紹介をする. 簾 Q を以下のような $A_{n-1}^{(1)}$ 型の簾とする.



この簾の頂点の集合と $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を同一視する. $v = (v_0, \dots, v_{n-1}), w = (w_0, \dots, w_{n-1}) \in (\mathbb{Z}_{>0})^n$ で V_i, W_i を $\dim V_i = v_i, \dim W_i = w_i$ を満たすベクトル空間で, $V = \bigoplus V_i, W = \bigoplus W_i$ とする.

このとき簾多様体 $\mathfrak{M}(v, w)$ は

$$\{(B_1, B_2, i, j) \in \mu^{-1}(0) \mid (B_1, B_2, i, j) \text{ は stable}\} / \prod_{k \in I} \mathrm{GL}(V_k)$$

と書ける. B_1 と B_2 はそれぞれ $(B_1)_k : V_k \rightarrow V_{k+1}$ と $(B_2)_k : V_k \rightarrow V_{k-1}$ のそれぞれ直和である.

トーラス $T = (\mathbb{C}^*) \times (\mathbb{C}^*) \times (\mathbb{C}^*)^{|w|}$ を考える. 簾多様体 $\mathfrak{M}(v, w)$ 上のトーラス T の作用を

$$(t_1, t_2, e_1, \dots, e_{|w|})(B_1, B_2, i, j) = (t_1 B_1, t_2 B_2, (e^k i_k)_k, (j_k (e^k)^{-1})_k)$$

と定義する. ここで $e^k = \mathrm{diag}(e_{w_1+w_2+\dots+w_{k-1}+1}, \dots, e_{w_1+w_2+\dots+w_k})$ とする.

このとき以下のことが知られている.

定理 9 ([6]). $\mathfrak{M}(v, w)$ のトーラス作用の固定点と $a = (0, \dots, 0, 1, \dots, n-1)$ で coloring された $|w|$ 個のヤング図形の組 $Y = (Y_i)_{1 \leq i \leq |w|}$ で $|v| = \sum_i |Y_i|$ かつ $v = \mathrm{wt}(a, Y)$ を満たすものと一対一対応する.

Proof. $W = \bigoplus_i e_i$ としたときに $\{B_2^q B_1^p i(e_k) \neq 0\}$ は V の基底となる. このとき, $|w|$ 個のヤング図形の組 $Y = (Y_i)$ を各 Y_k にたいして $\{(p, q) \mid B_2^q B_1^p i(e_k) \neq 0\}$ に対応するヤング図形を取ればよい. $\square$

接空間の T -module としての構造, つまり表現環 $R(T) \simeq \mathbb{Z}[t_1, t_2, e_1, \dots, e_{w_{n-1}}]$ での表示を調べる.

命題 10. $Z = (B_1, B_2, i, j) \in \mathfrak{M}(v, w)$ をトーラス作用の固定点として, $Y = (Y_i)$ をそれに対応したヤング図形とする. このとき Z における接空間は以下のような構造を持つ.

$$T_Z \mathfrak{M}(v, w) = \sum_{i'} \sum_i \left(\sum_{s \in (Y_i)_{a_i - l(Y_i)}} t_2^{n - l'(Y_i)} t_1 + \sum_{s \in (Y_{i'})_{a_i + l'(Y_i)}} t_2^n t_1^{m - l(Y_i)} + \sum_{s \in (Y_i)_i} t_2^{n-1} t_1^{m-1} \right. \\ \left. - \sum_{s' \in (Y^i)_{\blacklozenge^\heartsuit}} \left(\sum_{s \in (Y_{i'})_{a_i - n' + m'}} t_2^{n-n'} t_1^{m-m'} \right) e_{i'}^{-1} e_i \right) \quad (1)$$

ここで $(Y_i)_{\blacklozenge^\heartsuit} = \{(m, n) \in Y_i \mid (m+1, n) \notin Y_i \text{ かつ } (m, n+1) \notin Y_i\}$ とする.

接空間の上記の式により, Bialynicki-Birula cell の次元を数え上げることで, $\mathfrak{M}(v, w)$ のポアンカレ多項式を計算することができる.

定理 11 (主結果).

$$P_t(\mathfrak{M}(v, w)) = \sum_{(Y_i)_i} \prod_i t^{2b(i)}$$

ここで $b(i)$ は以下で与えられる.

$$b(i) = \sum_{i'} (\#\{(m, n) \in (Y_{i'})_{a_i - l'(Y_i)} \mid m < l'(Y_i)\} \\ + \sum_{s' \in (Y_i)_{\blacklozenge^\heartsuit}} \#\{(m, n) \in (Y_{i'})_{a_i - m' + n'} \mid m = m', n < n'\} + \#\{(m, n) \in (Y_{i'})_{a_i - m' + n'} \mid m < m'\}) \\ + \sum_{i > i'} (\#\{(m, n) \in (Y_{i'})_{a_i - l'(Y_i)} \mid m = l'(Y_i)\} + \sum_{s' \in (Y_i)_{\blacklozenge^\heartsuit}} \#\{(m, n) \in (Y_{i'})_{i - m' + n'} \mid m = m'\})$$

ここからさらに母関数の積分解が得られることが期待される.

参考文献

- [1] Adam Gyenge, *Enumeration of diagonally colored Young diagrams*, Monatshefte für Mathematik volume 183 (2017), 143-157
- [2] Hiraku Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 76 (1994), no. 2, 365-416.
- [3] Hiraku Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 91 (1998), no. 3, 515-560.
- [4] Hiraku Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of Points on Surfaces*, University Lecture Series, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [5] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory, Third Enlarged Edition*, Springer-Verlag, 1994
- [6] Steven V. Sam, Peter Tingley, *Combinatorial realizations of crystals via torus actions on quiver varieties*, J Algebraic Combinatorics volume 39 (2014), 271-300.
- [7] Tamas Hausel, *Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties*, Invent Math, volume 181 (2010), 21-37.