グラフの Khovanov ホモロジー

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
長谷川　蒼 (Aoi HASEGAWA)

概要

1999 年に Khovanov によって絡み目の Khovanov ホモロジーが導入された．これは Jones 多項式の categorification と呼ばれている．そのアイデアの類推として、2005 年に Guizon と Rong によってグラフの Khovanov ホモロジーが導入された．これは彩色多項式の categorification と呼ばれている．本稿では enhanced state を用いて, ループと多重辺を持つことを許した有限無向グラフからコチェイン複体が得られることを紹介する．また, グラフの Khovanov ホモロジーの次数付き Euler 標数から彩色多項式が, コチェイン複体の短完全系列から彩色多項式の deletion-contraction rule がそれぞれ復元されることを示す．最後に Khovanov ホモロジーのいくつかの性質と既に知られてる具体的な計算例を述べた後に, 完全グラフの Khovanov ホモロジーの計算の予想を紹介する．本研究は北海道大学大学院理学院数学専攻博士後期課程 2 年山形颯氏との共同研究である．

1　準備

以下, ループと多重辺の存在を許した有限無向グラフを単にグラフと呼ぶ.

定義 1.1. G をグラフ, e を G の辺, s を G の辺の部分集合とする．このとき G から e を除いたグラフ $G-e$ を G の e による deletion, e を 1 点に潰したグラフ G/e を G の e による contraction, 頂点が G の頂点で辺が s からなるグラフ $[G:s]$ を G の s による spanning graph という.

定義 1.2. G をグラフ, λ を正の整数とする．このとき, G の頂点から $\{1,2,\cdots,\lambda\}$ への写像で, 辺で接続されている頂点同士に対して異なる値を与えるものを λ-彩色という．また, G の λ-彩色の数を $P_G(\lambda)$ と書く.

命題 1.3. $G=(V,E)$ とする．$P_G(\lambda)$ は以下の性質を持つ.

1. $|E|=0$ のとき, $P_G(\lambda)=\lambda^{|V|}$
2. 任意のグラフ G に対して deletion-contraction rule が成立．すなわち, $e\in E$ に対して $P_G(\lambda)=P_{G-e}(\lambda)-P_{G/e}(\lambda)$

上の性質から, $P_G(\lambda)$ は λ に関する多項式であることが分かる．$P_G(\lambda)$ を G の彩色多項式という.

定義 1.4. d を整数, $\mathcal{M}=\bigoplus_{j\geq 0}M_j$, $\mathcal{N}=\bigoplus_{j\geq 0}N_j$ を次数付きアーベル群で, M_j と N_j がそれぞれ $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ の次数 j の元の集合となっているものとする．このとき, $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への群準同型写像が任意の j で $\alpha(M_j)\subseteq N_{j+d}$ が成り立つとき, α の次数は d という．特に次数 0 の群準同型写像を次数

を保つ群準同型写像という．コチェイン複体 $C=(C^i,\partial^i)_{i\geq 0}$ が次数付きコチェイン複体であるとは，各 C^i が次数付きアーベル群で，ある整数 d が存在して，各 ∂^i の次数が d あるときをいう．コチェイン写像 $\phi=(\phi_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ が次数を保つとは，各 ϕ_q が次数を保つ準同型写像であるときをいう．

2　コチェイン複体の構成

コチェイン群の構成

定義 2.1 (enhanced state)**.** G をグラフとする．このとき，(s,c) が G の enhanced state であるとは，s が G の辺の部分集合，c が $[G:s]$ の連結成分から $\{1,x\}$ への写像であるときをいう．また，$S=(s,c)$ を enhanced state であるとき，$i(S)$ を s の元の個数，$j(S)$ を x を対応させる $[G:s]$ の連結成分の個数とする．

定義 2.2 (コチェイン群)**.** G をグラフとする．このとき，$i(S)=i, j(S)=j$ となる G の enhanced state を基底とする自由アーベル群を $C^{i,j}(G)$ とかく．また，$C^i(G):=\bigoplus_{j\geq 0}C^{i,j}(G)$ とする．

コバウンダリ写像の構成

$\{1,x\}$ に対して，演算 $*$ を次のように定める．$1*1=1$, $x*1=1*x=x$, $x*x=0$

定義 2.3 (コバウンダリ写像)**.** G は辺が番号付けられたグラフとする．このとき $d^{i,j}:C^{i,j}(G)\to C^{i+1,j}(G)$ を以下のように定める：$C^{i,j}(G)$ の enhanced state$S=(s,c)$ に対して，

$$d^{i,j}(S):=\sum_{e\in E-s}(-1)^{n(e)}S_e$$

ただし，$n(e)$ は e より小さい番号を持つ s 内の辺の個数，S_e は次のように定義される enhanced state(s_e,c_e) または 0 である．$s_e=s\cup\{e\}$, $E_1,\dots,E_k$ を $[G:s]$ の連結成分とする．

1. e の端点が 1 つの連結成分のみに属するとき (E_1 のみに属しているとする)
   $[G:s_e]$ の連結成分は $E_1\cup\{e\},E_2,\dots,E_k$ である．c_e を次で定める:
   $c_e(E_1\cup\{e\})=c(E_1)$, $c_e(E_i)=c(E_i)$ $(i=2,\dots,k)$
2. e が異なる 2 つの連結成分を繋ぐとき (E_1 と E_2 を繋いでるとする)
   $[G:s_e]$ の連結成分は $E_1\cup E_2\cup\{e\},E_3,\dots,E_k$ である．c_e を次で定める:
   $c_e(E_1\cup E_2\cup\{e\})=c(E_1)*c(E_2)$, $c_e(E_i)=c(E_i)$ $(i=3,\dots,k)$

$c(E_1)=c(E_2)=x$ のときは $S_e=0$, それ以外のときは $S_e=(s_e,c_e)$ とする．

補題 2.4. $d^{i+1,j}\circ d^{i,j}=0$

従って，$C(G)=(C^i(G),d^i)_{i\geq 0}$ は次数付き有限コチェイン複体となる．また，d^i が次数を保つことから各 j に対して $d^{i,j}:=d^i|_{C^{i,j}(G)}: C^{i,j}(G)\to C^{i+1,j}(G)$ とおくと $C^{*,j}(G):=(C^{i,j}(G),d^{i,j})_{i\geq 0}$ は有限コチェイン複体になる．

定義 2.5 (Khovanov ホモロジー, [1])**.** $H^i(G) := H^i(C(G))$, $H^{i,j}(G) := H^i(C^{*,j}(G))$ をそれぞれ G の i 次元 Khovanov ホモロジー, 次数 j の i 次元 Khovanov ホモロジーという.

注意 2.6. $H^i(G)$ はコホモロジー群だが, 慣例として Khovanov ホモロジーと呼ぶ.

3 彩色多項式と deletion-contraction rule の復元

彩色多項式の復元

定義 3.1 (次数付き次元)**.** $\mathcal{M} = \bigoplus_{j\geq 0} M_j$ を次数付きアーベル群で, M_j が $\mathcal{M}$ の次数 j の元の集合となっているものとする. このとき,

$$q\ \mathrm{dim}\mathcal{M} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \cdot \mathrm{rank}(M_j)$$

を $\mathcal{M}$ の次数付き次元という. ただし, $\mathrm{rank}(M_i) := \mathrm{dim}_{\mathbb{Q}}(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$

$A = \bigoplus_i A_i$, $B = \bigoplus_i B_i$ を次数付きアーベル群で, A_j と B_j がそれぞれ A, B の次数 j の元の集合となっているものとする. また, $A\oplus B$ と $A\otimes B$ の次数 k の集合はそれぞれ $A_k\oplus B_k$, $\oplus_{i+j=k}(A_i\otimes B_j)$ であるとする. このとき, $\mathrm{rank}(A_i\oplus B_i) = \mathrm{rank}(A_i)+\mathrm{rank}(B_i)$, $\mathrm{rank}(A_i\otimes B_j) = \mathrm{rank}(A_i)\mathrm{rank}(B_j)$ であることから, $q\ \mathrm{dim}(A \oplus B) = q\ \mathrm{dim}A + q\ \mathrm{dim}B$, $q\ \mathrm{dim}(A \otimes B) = q\ \mathrm{dim}A \cdot q\ \mathrm{dim}B$ となる.

例 3.2 ($\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x$)**.** $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x$ を $\mathbb{Z}$ が次数 0 の元の集合, $\mathbb{Z}x$ が次数 1 の元の集合となるような次数付きアーベル群とみなす. このとき, $q\,\mathrm{dim}(\mathcal{M}) = 1 + q$, $q\,\mathrm{dim}(\mathcal{M})^{\otimes k} = (1 + q)^k$ である.

定義 3.3. C をコチェイン複体, $H^i(C)$ を C の i 次元コホモロジー群とする. このとき,

$$\chi_q(C) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i q\,\mathrm{dim}H^i(C)$$

を C の次数付き Euler 標数という.

補題 3.4. $C = (C^i, \partial^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を次数付き有限コチェイン複体とし, 次の条件を満たす.

1. コバウンダリ写像が次数を保つ.
2. C の各コチェイン群 $C^i (i = 0, 1, \ldots, n)$ が有限次元.

このとき,

$$\chi_q(C) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i q\ \mathrm{dim}C^i$$

定理 3.5 (彩色多項式の復元)**.**

$$\chi_q(C(G)) = P_G(1 + q)$$

deletion-contraction rule の復元

$G=(V(G),E(G))$ を n 本の辺からなる 辺が番号付けられたグラフ, e は G の n 番目の辺とする. また, $G-e, G/e$ は自然に順序付けられているとする. つまり, G で i 番目の辺 $(i=2,\dots,n-1)$ は $G-e, G/e$ でも i 番目の辺とする.

定理 3.6. 次数を保つコチェイン写像 α と β が存在して, 以下の系列は完全になる：

$$0 \longrightarrow C^{i-1}(G/e) \xrightarrow{\alpha_i} C^i(G) \xrightarrow{\beta_i} C^i(G-e) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

α の構成

$\alpha_{i,j} : C^{i-1,j}(G/e) \to C^{i,j}(G)$ を以下のように定める. enhanced state $S=(s,c)$ に対して, $\tilde{s} := s \cup \{e\}$ とする. このとき, $[G/e : s]$ と $[G : \tilde{s}]$ の連結成分の個数が一致する. そこで, $K_1, K_2, \dots, K_r$ を $[G/e : s]$ の連結成分 (ただし, e を潰して得られる頂点は K_1 に属するとする) としたとき, $[G : \tilde{s}]$ の連結成分は $K_1', K_2, \dots, K_r$ とかける. ただし, K_1' は e を含む連結成分である. そこで, $\tilde{c}$ を, $\tilde{c}(K_1') = c(K_1)$, $\tilde{c}(K_i) = c(K_i)$ $(i=2,3,\dots,r)$ として, $\alpha_{i,j}(S) := (\tilde{s}, \tilde{c})$ と定める.

β の構成

$\beta_{i,j} : C^{i,j}(G) \to C^{i,j}(G-e)$ を以下のように定める. enhanced state を $S=(s,c)$ とする. $e \notin S$ のときは $\beta_{i,j}(S) := S$, $e \in S$ のときは $\beta_{i,j}(S) := 0$ と定める.

系 3.7. 任意の正の整数 j に対して, 以下の系列は完全：

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^{0,j}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{0,j}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{0,j}(G/e) \\ &\xrightarrow{\alpha^*} H^{1,j}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{1,j}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{1,j}(G/e) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots \\ &\xrightarrow{\alpha^*} H^{i,j}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{i,j}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{i,j}(G/e) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

したがって, 以下の系列は完全：

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^{0}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{0}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{0}(G/e) \\ &\xrightarrow{\alpha^*} H^{1}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{1}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{1}(G/e) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots \\ &\xrightarrow{\alpha^*} H^{i}(G) \xrightarrow{\beta^*} H^{i}(G-e) \xrightarrow{\gamma^*} H^{i}(G/e) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

補題 3.4, 定理 3.5 から次のことが言える.

系 3.8 (deletion-contraction rule の復元)**.** 定理 3.6 の系列 (1) から彩色多項式の deletion-contraction rule が復元される.

(s,c) を enhanced state とする. このとき連結準同型 γ^* は以下のような準同型である:

$$\gamma^*\left((s,c)+B^{i,j}(G-e)\right) = (-1)^i (s \cup \{e\}/e, c_e') + B^{i,j}(G/e)$$

ただし $s \cup \{e\}/e$ は $s \cup \{e\}$ に対して e を 1 点に潰したときに得られる G/e の辺集合, c'_e は $c'_e(K'_1) = c(K_1)$, $c'_e(K_i) = c(K_i)$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$ である. ここで, $K_1, K_2, \ldots, K_r$ を $[G : s \cup \{e\}]$ の連結成分 (ただし, $e \in K_1$) としたとき, $[G/e : s \cup \{e\}/e]$ の連結成分は $K'_1, K_2, \ldots, K_r$ とかける. ただし, K'_1 は e を潰して得られる頂点を含む連結成分である.

4　Khovanov ホモロジーの性質

命題 4.1. ループのあるグラフの Khovanov ホモロジーは全て自明になる.

命題 4.2. 多重辺があるグラフの Khovanov ホモロジーは, 多重辺を 1 つの辺に置き換えた Khovanov ホモロジーと同型になる.

命題 4.1 と命題 4.2 より, グラフの Khovanov ホモロジーを考える際は単純グラフだけを考えればよい.

2 つのグラフ G_1, G_2 に対して, グラフの非交和 $G_1 \sqcup G_2$ を考える. G_1 で i 番目の辺は $G_1 \sqcup G_2$ でも i 番目の辺, G_2 で i 番目の辺は $G_1 \sqcup G_2$ では $E(G_1) + i$ 番目の辺となるように $G_1 \sqcup G_2$ の辺を順序付ける. このとき, $C(G_1 \sqcup G_2) = C(G_1) \otimes C(G_2)$ となる. Künneth の定理から, 次の定理が従う.

定理 4.3. 任意の正の整数 i, j に対して, 以下の同型が成立. :

$$H^i(G_1 \sqcup G_2) \cong \left[\bigoplus_{p+q=i} H^p(G_1) \otimes H^q(G_2) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p+q=i+1} \mathrm{Tor}\,(H^p(G_1), H^q(G_2)) \right]$$

$$H^{i,j}(G_1 \sqcup G_2) \cong \left[\bigoplus_{p+q=i,\, s+t=j} H^{p,s}(G_1) \otimes H^{q,t}(G_2) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p+q=i+1,\, s+t=j} \mathrm{Tor}\left(H^{p,s}(G_1), H^{q,t}(G_2)\right) \right]$$

定義 4.4 (次数シフト)**.** l を整数, $\mathcal{M} = \bigoplus_{j \geq 0} M_j$ を次数付きアーベル群で, M_j が $\mathcal{M}$ の次数 j の元の集合となっているものとする. このとき, $\mathcal{M}\{l\}$ を, M_{j-l} が $\mathcal{M}\{l\}$ の次数 j の元の集合となる次数付きアーベル群と定める.

$\mathbb{Z}$ を次数 0 の元の集合が $\mathbb{Z}$ となる次数付きアーベル群とみなす. このとき次数シフトの定義から, 次数付きアーベル群 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M} \otimes (\mathbb{Z}\{1\}) \cong \mathcal{M}\{1\}$ が成立する.

定義 4.5 (頂点の次数)**.** グラフの頂点 v に接続されている辺の本数のことを v の次数といい, $\deg v$ と書く. ただし, ループが接続されている場合は 2 本の辺が接続されているとする.

定義 4.6 (pendant edge)**.** グラフの辺 e が次数 1 の頂点を端点にもつとき, e は pendant edge であるという.

定理 4.7. G を pendant edge e を持つグラフとする. このとき, 任意の正の整数 i に対して同型 $H^i(G) \cong H^i(G/e)\{1\}$ が成立する.

5　具体的な計算結果

例 5.1 (辺を持たないグラフ)**.** $\bullet$ を 1 点のみからなるグラフ, N_v を v 個の頂点のみからなるグラフとする. このとき, これらの Khovanov ホモロジーは以下のようになる：

$$H^i(\bullet) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases},\ H^i(N_v) = \begin{cases} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\})^{\otimes v} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

証明. $\bullet$ に関しては $C^0(\bullet) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\}$, $C^i(\bullet) = 0 (i > 0)$ となることから 明らか. N_v に関しては定理 4.3 と一点の場合の Khovanov ホモロジーからすぐ分かる. □

例 5.2 (木)**.** T_n を n 個の辺からなる木とする. この Khovanov ホモロジーは以下のようになる：

$$H^i(T_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}\{n\} \oplus \mathbb{Z}\{n+1\} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

証明. 次数 1 の辺を持つので, 定理 4.7 と一点の Khovanov ホモロジーから $H^i(T_n)$ が分かる. □

例 5.3 (サイクルグラフ)**.** P_n を n 個の辺からなるサイクルグラフとする. $i > 0$ のとき, この Khovanov ホモロジーは以下のようになる：

$$H^0(P_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}\{n\} \oplus \mathbb{Z}\{n-1\} & (n \geq 2,\ n \text{ は偶数}) \\ \mathbb{Z}\{n\} & (n \geq 2,\ n \text{ は奇数}) \\ 0 & (n = 1) \end{cases}$$
$$H^i(P_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{n-i\} \oplus \mathbb{Z}\{n-i-1\} & (n-i \geq 2,\ n-i \text{ は偶数}) \\ \mathbb{Z}\{n-i\} & (n-i \geq 2,\ n-i \text{ は奇数}) \\ 0 & (n-i \leq 1) \end{cases}$$

6　My work

n 次完全グラフを K_n とかく.

定理 6.1 (Hasegawa, Yamagata)**.**

$$H^i(K_4) = \begin{cases} \mathbb{Z}\{4\} & (i = 0) \\ (\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2)\{3\} \oplus \mathbb{Z}\{2\} & (i = 1) \\ \mathbb{Z}_2^2\{2\} \oplus \mathbb{Z}^2\{1\} & (i = 2) \\ 0 & (i \geq 3) \end{cases},\ H^i(K_5) = \begin{cases} \mathbb{Z}\{5\} & (i = 0) \\ (\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_2)\{4\} \oplus \mathbb{Z}\{3\} & (i = 1) \\ (\mathbb{Z}^6 \oplus \mathbb{Z}_2^5)\{3\} \oplus \mathbb{Z}^5\{2\} & (i = 2) \\ \mathbb{Z}_2^6\{2\} \oplus \mathbb{Z}^6\{1\} & (i = 3) \\ 0 & (i \geq 4) \end{cases}$$

上の計算結果から, 任意の $i(\geq 0)$ 対して $H^i(K_4) \cong H^{i-1}(K_3)^{\oplus 2} \oplus H^i(K_3)\{1\}$, $H^i(K_5) \cong H^{i-1}(K_4)^{\oplus 3} \oplus H^i(K_4)\{1\}$ したがって $n \geq 4$ のとき K_n が以下のように記述されることを予想した.

予想 6.2 (Hasegawa, Yamagata)**.** $n \geq 4$ 次完全グラフとする. このとき, 任意の $i(\geq 0)$ に対して以下の同型が成立する:

$$H^i(K_n) \cong H^{i-1}(K_{n-1})^{\oplus(n-2)} \oplus H^i(K_{n-1})\{1\}$$

証明のプラン． K_n のある頂点 v に辺 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ が接続してるとする．また, $G_0 = K_n$, $G_j = G_{j-1} - e_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-2)$ とおく. 以下の 2 つを示せばよい.

予想 6.3 (Hasegawa, Yamagata)**.** 系 3.7 を $G = G_j$, $e = e_{j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-3)$ に適用したとき, 連結準同型が全てゼロ写像になる.

予想 6.3 から $j = 0, 1, \ldots, n-3$ に対して, 以下の短完全系列が得られる :

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(G_j/e_{j+1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^i(G_j) \xrightarrow{\beta^*} H^i(G_{j+1}) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

予想 6.4 (Hasegawa, Yamagata)**.** $j = 0, 1, \ldots, n-3$ に対して, 短完全系列 (4) は分裂する.

予想 6.4 の結果から $H^i(G_j) \cong H^{i-1}(G_j/e_{j+1}) \oplus H^i(G_{j+1})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-3)$ であり, 命題 4.2 と定理 4.7 からそれぞれ $H^{i-1}(G_j/e_{j+1}) \cong H^{i-1}(K_{n-1})$, $H^i(G_{n-2}) \cong H^i(K_{n-1})\{1\}$ となることから $H^{i-1}(K_{n-1})^{\oplus(n-2)} \oplus H^i(K_{n-1})\{1\}$ を得る.

7　終わりに

本稿で紹介した定理の証明は殆ど省略した．証明は [1] を参照せよ．グラフの Khovanov ホモロジーの幾何学的意味については分かっていないことが多い．P_n や K_n で $\mathbb{Z}_2$ が現れたが, それの幾何学的意味については, 以下のことが知られている．ただし, グラフ G がサイクル C を持つとき, C の辺の個数を C の長さという.

定理 7.1 ([2], Theorem 21)**.** グラフ G の頂点の個数を v とする．このとき, G の Khovanov ホモロジーが捩じれ部分を持つための必要十分条件は, G がループを持たず, 長さが 3 以上のサイクルを持つことである．このとき, サイクルの長さが奇数のときは $H^{1,v-1}(G)$ が $\mathbb{Z}_2$ を含み, 偶数のときは $H^{2,v-2}(G)$ が $\mathbb{Z}_2$ を含む.

定理 7.1 から捩じれ部分はグラフのサイクルと関連があることが分かる．しかし, 捩じれ部分が現れる個数がどのような幾何学的性質を反映しているかはまだ分かっていない.

超平面配置の場合でも Khovanov ホモロジーを考えられることが知られている．この場合, 次数付き Euler 標数は特性多項式が, コチェイン複体の短完全系列から特性多項式の deletion-restriction rule がそれぞれ復元される．グラフから graphic arrangement という超平面配置を得ることができるので, グラフの Khovanov ホモロジーは超平面配置の Khovanov ホモロジーの特別な場合と思える．詳細は [3] を参照せよ.

参考文献

[1] Laure Helme-Guizon, Yongwu Rong, *A categorification for the chromatic polynomial*, Algebraic & Geometric Topology, 5, 1365-1388, 2005.

[2] Laure Helme-Guizon, J Przytycki, Yongu Rong, *Torsion in graph homology*, arXiv:math.GT/0507245v2

[3] Zsuzsanna Dancso, Anthony Licata, *Odd Khovanov homology for hyperplane arrangements*, Journal of Algebra, 2015, 436, 102-144