

リッチ平坦計量からインスタントンを作る

東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻
原 健太郎 (Kentaro HARA)

1 背景（重力理論・リーマン幾何学）

Definition 1. (M, g) を（準）リーマン多様体とする。レビ・チビタ接続（リーマン接続）から定義されるリッチ曲率を $R_{\mu\nu}$ 、スカラー曲率を R とする。

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

を満たすとき (M, g) をアインシュタイン多様体という。また上記方程式を（真空の）アインシュタイン方程式と呼ぶ。

2 背景（マクスウェル方程式・ゲージ理論）

対称行列全体の集合を $Alt_n(\mathbb{R})$ と表すこととする。つまり

$$Alt_n(\mathbb{R}) := \{F \in M_n(\mathbb{R}) \mid F^T = -F\}$$

と定義する。

Definition 2. 線形写像 $*: Alt_4(\mathbb{R}) \rightarrow Alt_4(\mathbb{R})$ を以下で定義する。

$$* \left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{34} & -\hat{F}_{24} & \hat{F}_{23} \\ -\hat{F}_{34} & 0 & \hat{F}_{14} & -\hat{F}_{13} \\ \hat{F}_{24} & -\hat{F}_{14} & 0 & \hat{F}_{12} \\ -\hat{F}_{23} & \hat{F}_{13} & -\hat{F}_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

次に $\hat{F}$ を $\mathbb{R}^4$ 上の Alt_4 値関数 $\hat{F}(x)$ に格上げし、 $\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式

$$\hat{F}(x)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu, \quad \left(* \hat{F}(x) \right)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

を定義する。ここではアインシュタインの縮約記法を使っている。

$$\hat{F} := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、

$$d \left(\hat{F}_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0, d \left(\left(* \hat{F} \right)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0$$

を仮定すると、 E_μ を電場、 B_μ を磁場とするマクスウェル方程式が導出される。そこで $*\hat{F} = -\hat{F}$ となるような $\hat{F}$ をインスタントンという。

Fact 2.1. $\hat{F}$ がインスタントン条件とビアンキ恒等式を同時に満たすならば、その $\hat{F}$ はヤン・ミルズ方程式の解である。つまり

$$*\hat{F} = -\hat{F}, d\left(\hat{F}_{\mu\nu}dx_\mu \wedge dx_\nu\right) = 0 \implies d\left(\left(*\hat{F}\right)_{\mu\nu}dx_\mu \wedge dx_\nu\right) = 0$$

が成立する。

3 先行研究

[1] においては [2] の結果に基づいて 4×4 反対称行列 $F, \hat{F}, \theta$ の各成分に対して以下のような関係式を与えている。

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{1+F\theta}F\right)_{\mu\nu}$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ であり、

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。また対称行列 G, g も

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + (F\theta)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu})$$

のように与える。するとつまりは

$$g_{\mu\nu} = \left(2\left(E_4 + \hat{F}\theta\right)^{-1} - E_4\right)_{\mu\nu}$$

ということになる。ただし E_4 は 4×4 単位行列であり $F, \hat{F}$ に関してはゲージ曲率、 g, G に関しては計量を想定している。

[1] においては F がビアンキ恒等式を満たし、 $\hat{F}$ が自己双対であるときの解の一つを用いた場合 g が江口ハンソン計量になることを示している。この計量はよく知られたケーラー・アインシュタイン計量の一例である。 F がビアンキ恒等式を満たすとき g がケーラー計量になることは知られていたが、新たに [4] において我々はこの結果の一般化として $\hat{F}$ が自己双対であるときは g がエルミート・アインシュタイン計量になることを示した。つまり

Lemma 3.1. 反対称行列 $\hat{F}^-, \theta \in M_4\mathbb{R}$ に対して対称行列 $g \in M_4\mathbb{R}$ を

$$g = \left(2\left(E_4 + \hat{F}^-\theta\right)^{-1} - E_4\right)$$

で定義する。ただし

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}$$

である。反対称行列 $\hat{F}^-$ を $\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式と思った時のホッジ作用素に対して

$$\star \hat{F}^- = -\hat{F}^-$$

を満たす場合

$$\det [g] = 1$$

となる。

Theorem 3.2. 局所的に $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視した場合、エルミート接続に対するリッチ曲率は

$$R_{\bar{j}k} = \partial_{\bar{j}} \partial_k \log (\det [g]) \quad (2)$$

で計算される。つまり上記の条件 $\star \hat{F}^- = -\hat{F}^-$ のもとでは g が計量だとすると

$$R_{\bar{j}k} = 0$$

すなわちリッチ平坦・アインシュタイン計量を意味している。

ということを示した。自己双対である $\hat{F}$ の具体例としてはインスタントン解がよく知られており、非可換多様体上のインスタントン解については [3] において計算されている。このインスタントン解に対応するエルミート・アインシュタイン計量が [4] において計算されている。

4 リッチ平坦計量からインスタントンを作る (主結果)

次に、先行研究のの逆について考える。これは、「計量がリッチ平坦な場合、 $\hat{F}$ インスタントンであるか？」という問いになる。まずは $g(\hat{F}(x))$ が計量である必要があるが、この条件だけから $\hat{F}(x)$ は「ほぼ」反自己双対であるという結論が出てしまう。そして「ほぼ」反自己双対であるという条件に加えて $\hat{F}(x)$ が「漸近的にゼロである」条件を課すと、 $\hat{F}(x)$ は反自己双対になってしまう。

Remark. まず $\hat{F}$ は交代行列ではあるが、先行研究とは違いインスタントンであると仮定されていないため $\hat{F}$ は次のようになる事に注意する必要がある。

$$\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12}(x) & \hat{F}_{13}(x) & \hat{F}_{14}(x) \\ -\hat{F}_{12}(x) & 0 & \hat{F}_{23}(x) & \hat{F}_{24}(x) \\ -\hat{F}_{13}(x) & -\hat{F}_{23}(x) & 0 & \hat{F}_{34}(x) \\ -\hat{F}_{14}(x) & -\hat{F}_{24}(x) & -\hat{F}_{34}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 3. θ は (1) で定義したものとする。 E_4 を 4×4 の単位行列とし $\det [E_4 - \hat{F}(x)\theta] \neq 0$, であり $\hat{F}(x)$ を 4×4 交代行列とする。 4×4 行列 $g(\hat{F}(x))$ 以下のように定義する。

$$g(\hat{F}(x)) := 2(E_4 - \hat{F}(x)\theta)^{-1} - E_4. \quad (3)$$

前述の通り $g(\hat{F}(x))$ が計量である必要があるので、 $g(\hat{F}(x))$ が対称行列であると仮定する。

Lemma 4.1. もし $g\left(\hat{F}(x)\right) = 2\left(E_4 - \hat{F}(x)\theta\right)^{-1} - E_4$ が対称行列であると仮定すると、

$$\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12}(x) & \hat{F}_{13}(x) & \hat{F}_{14}(x) \\ -\hat{F}_{12}(x) & 0 & \hat{F}_{14}(x) & -\hat{F}_{13}(x) \\ -\hat{F}_{13}(x) & -\hat{F}_{14}(x) & 0 & \hat{F}_{34}(x) \\ -\hat{F}_{14}(x) & \hat{F}_{13}(x) & -\hat{F}_{34}(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。

Proof. 素直に計算すれば結論が導き出される。 $\square$

以下の記号は便利なので、今後使う。

Definition 4. $\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)$ は以下の様に定義される。

$$\hat{F}_{\mathbb{C}}(x) := \begin{pmatrix} \hat{F}_{1\bar{1}}(x) & \hat{F}_{1\bar{2}}(x) \\ \hat{F}_{2\bar{1}}(x) & \hat{F}_{2\bar{2}}(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\hat{F}_{12}(x) & -\hat{F}_{13}(x) + i\hat{F}_{14}(x) \\ \hat{F}_{13}(x) + i\hat{F}_{14}(x) & i\hat{F}_{34}(x) \end{pmatrix}$$

Proposition 4.2. もし $g\left(\hat{F}(x)\right)$ が (3) と (4) を満たすとする、

$$\text{Det}\left[g\left(\hat{F}(x)\right)\right] = 1 + 8i\eta \text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right] - 32\eta^2\left(\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\right)^2 + \mathcal{O}(\eta^3)$$

となる。

これ等の準備の後、リッチ曲率について調べてみる。

Lemma 4.3. $g\left(\hat{F}(x)\right)$ が (3) と (4) を満たすとする。するとリッチ曲率 (2) は

$$R_{\bar{j}k}\left(\hat{F}(x)\right) = \eta\partial_{\bar{j}}\partial_k\left(\hat{F}_{12}(x) + \hat{F}_{34}(x)\right) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Proof.

$$\begin{aligned} R_{\bar{j}k}(x) &= \partial_{\bar{j}}\partial_k\left[\log\left\{\text{Det}\left[g\left(\hat{F}(x)\right)\right]\right\}\right] \\ &= 2i\eta\partial_{\bar{j}}\partial_k\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right] - 8\eta^2\partial_{\bar{j}}\partial_k\left(\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\right)^2 - 16\eta^2\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\partial_{\bar{j}}\partial_k\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right] \\ &\quad + 16\eta^2\left(\partial_{\bar{j}}\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\right)\left(\partial_k\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\right) - 32i\eta^2\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right]\partial_{\bar{j}}\partial_k\text{Tr}\left[\hat{F}_{\mathbb{C}}(x)\right] + \mathcal{O}(\eta^3) \end{aligned}$$

$\square$

Definition 5 (asymptotic to zero). “ $f(z_1, z_2)$ が漸近的にゼロ” とは以下の様に定義される。

$$\lim_{|z_1|^2 + |z_2|^2 \rightarrow \infty} f(z_1, z_2) = 0.$$

次の「最大値原理」は、調和解析の有名な定理である。

Fact 4.4 (Maximum principle). もし $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき

$$\Delta f(z_1, z_2) = \partial_1 \partial_1 f(z_1, z_2) + \partial_2 \partial_2 f(z_1, z_2) = 0$$

f は調和関数と呼ばれる。調和関数は次の最大値原理を満たす。 K が U の空でないコンパクトな部分集合である場合、 K に制限された f は K の境界でその最大値と最小値を達成する。 f が一定である場合を除き、極大値または極小値を持つことは出来ない。

Corollary 4.5. $f \in C^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{R})$ とし、 $f(z_1, z_2)$ が漸近的にゼロとする。もし任意の j と k に対して $\partial_j \partial_k f(z_1, z_2) = 0$ が成り立つならば、

$$f(z_1, z_2) = 0$$

となる。

Proof. 先ず

$$\Delta f(z_1, z_2) = \partial_1 \partial_1 f(z_1, z_2) + \partial_2 \partial_2 f(z_1, z_2) = 0.$$

が成り立つため f は $\mathbb{C}^2$ 上の調和関数となる。加えて f が漸近的にゼロであることを合わせると

$$f(z_1, z_2) = 0.$$

□

ここでこれまでの結果を纏めてみる。

Remark. $g(\hat{F}(x))$ が対称行列であるという事とはつまり

$$\hat{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12}(x) & \hat{F}_{13}(x) & \hat{F}_{14}(x) \\ -\hat{F}_{12}(x) & 0 & \hat{F}_{14}(x) & -\hat{F}_{13}(x) \\ -\hat{F}_{13}(x) & -\hat{F}_{14}(x) & 0 & \hat{F}_{34}(x) \\ -\hat{F}_{14}(x) & \hat{F}_{13}(x) & -\hat{F}_{34}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

ということを意味する。合わせて $\hat{F}_{ij}(x)$ が漸近的にゼロであることを仮定すると $\partial_j \partial_k (\hat{F}_{12}(x) + \hat{F}_{34}(x)) = 0$ となり、それは

$$\hat{F}_{12}(x) = -\hat{F}_{34}(x)$$

を意味する。

Theorem 4.6 (Main Theorem). もし $\hat{F}_{ij}(x)$ が漸近的にゼロであり、 $R_{\bar{j}k}(x) \equiv 0 \pmod{\eta^2}$ だとすると $\hat{F}$ は反自己双対行列になる。つまり、

$$R_{\bar{j}k}(\hat{F}(x)) \equiv 0 \pmod{\eta^2}, \quad \lim_{|z_1|^2 + |z_2|^2 \rightarrow \infty} \hat{F} = 0 \implies * \hat{F}^-(x) = -\hat{F}^-(x)$$

Proof. もし $R_{\bar{j}k}(x) \equiv 0 \pmod{\eta^2}$ ならば $\partial_j \partial_k (\hat{F}_{12}(x) + \hat{F}_{34}(x)) = 0$ であり $\hat{F}_{ij}(x)$ は漸近的にゼロなので

$$* \hat{F}^-(x) = -\hat{F}^-(x).$$

□

参考文献

- [1] S. Lee, R. Roychowdhury and H. S. Yang, “Test of Emergent Gravity,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 086007 doi:10.1103/PhysRevD.88.086007 [arXiv:1211.0207 [hep-th]].
- [2] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *JHEP*. **9** (1999) 032, [hep-th/9908142].
- [3] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, “Elongated $U(1)$ instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$,” *JHEP* **0111** (2001) 068 doi:10.1088/1126-6708/2001/11/068 [hep-th/0109111].
- [4] K. Hara, A. Sako and H. S. Yang, “Hermitian-Einstein metrics from noncommutative $U(1)$ instantons,” arXiv:1809.02328 [hep-th].