

ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式に関する 最小化問題とその応用

埼玉大学大学院 理工学研究科
浜野 大 (Masaru Hamano)

概要

ポテンシャル項をもつ非線形シュレディンガー方程式を扱う。線形作用と非線形作用が釣り合うときに定在波解が生じる。まず、定在波解から導かれる楕円型方程式に対応する汎関数の最小化問題をビリアル等式を制約条件に用いて考える。この最小化問題が達成されるためのポテンシャルと周波数の十分条件を与える。さらに、この最小値よりも汎関数の値が小さい初期値をもつ非線形方程式の解が時間大域的に存在するための十分条件を与える。

1 導入

本稿ではポテンシャル項をもつ以下の非線形シュレディンガー方程式を考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_V u = -|u|^{p-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{NLS}_V)$$

ここで、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ 、時間微分 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ 、シュレディンガー作用素 $-\Delta_V = -\Delta + V = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V$ 。ポテンシャル $V(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数、解 $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数、初期値 $u_0(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は既知関数である。

1.1 準備

非負値 X, Y に対して、ある $C > 0$ が存在して $X \leq CY$ が成り立つとき $X \lesssim Y$ と表現する。 $X \lesssim Y \lesssim X$ が成り立つとき $X \sim Y$ と表現する。

定義 1.1 (ルベーク空間). $p \geq 1$ において、ルベーク空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ を次で定義する。

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty\}, \quad \|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & (p = \infty). \end{cases}$$

定義 1.2 (フーリエ変換・フーリエ逆変換). フーリエ変換とフーリエ逆変換を次のように定義する。

$$\begin{aligned} (\text{フーリエ変換}) \quad \mathcal{F}f(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \\ (\text{フーリエ逆変換}) \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx. \end{aligned}$$

ここで, $x \cdot \xi$ は $\mathbb{R}^d$ の内積で $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_d \xi_d$ である.

定義 1.3 (ソボレフ空間). 非斉次ソボレフ空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} W^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\}, \\ \|f\|_{W^{s,p}} &:= \|(1 - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(1 + 4\pi^2|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

斉次ソボレフ空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < \infty\}, \\ \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} &:= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(2\pi|\cdot|)^s \mathcal{F}f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

また, $p = 2$ のとき $W^{s,2}, \dot{W}^{s,2}$ をそれぞれ $H^s, \dot{H}^s$ で表す.

注意 1.4. $s = 1$ のとき, ソボレフノルムに関して次の同値性が成り立つ.

$$\|f\|_{W^{1,p}}^p \sim \|f\|_{L^p}^p + \|\nabla f\|_{L^p}^p = \|f\|_{L^p}^p + \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} f\|_{L^p}^p, \quad \|f\|_{\dot{W}^{1,p}}^p \sim \|\nabla f\|_{L^p}^p = \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} f\|_{L^p}^p.$$

ルベーク空間・ソボレフ空間を球対称関数に制限した空間を $L_{\text{rad}}^p(\mathbb{R}^d), W_{\text{rad}}^{s,p}(\mathbb{R}^d), \dot{W}_{\text{rad}}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ で表現する. つまり,

$$\begin{aligned} L_{\text{rad}}^p(\mathbb{R}^d) &:= \{f \in L^p(\mathbb{R}^d) : f \text{ は球対称関数.}\}, \\ W_{\text{rad}}^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \{f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d) : f \text{ は球対称関数.}\}, \\ \dot{W}_{\text{rad}}^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \{f \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) : f \text{ は球対称関数.}\}. \end{aligned}$$

ここで, 関数 f が球対称関数であるとは, ある関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在して,

$$f(x) = \varphi(|x|)$$

をみたすことである.

2 (NLS_V) の時間局所適切と解の時間挙動

時間に依存した非線形偏微分方程式の研究は大きく分けると 2 つに分けられる. 1 つ目は時間局所適切の有無である. (NLS_V) が時間局所適切であるとは, 次の (1)~(4) が成り立つことである.

- (1) (解の存在性) 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, 時間区間 $(T_{\min}, T_{\max}) = (T_{\min}(u_0), T_{\max}(u_0))$ ($\ni 0$) 上定義される (NLS_V) の解 $u \in C((T_{\min}, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して, $(T_{\min}, T_{\max})$ を超えて (NLS_V) の解は存在しない.
- (2) (解の一意性) (NLS_V) の解は一意である.
- (3) (Blow-up alternative) もし $T_{\max} < \infty$ ($T_{\min} > -\infty$) とすると,

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\lim_{t \searrow T_{\min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right).$$

- (4) (初期値への連続依存性) もし $u_{0,n} \rightarrow u_0$ in H^1 とすると, 任意の閉区間 $I \subset (T_{\min}, T_{\max})$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して $u_{0,n}$ を初期値にもつ (NLS_V) の解 u_n は I 上で定義されて $u_n \rightarrow u$ in $C(I; H^1)$ ($n \rightarrow \infty$) をみたす.

注意 2.1. (Blow-up alternative) より, 次が成り立つ.

$$\sup_{t \in (T_{\min}, T_{\max})} \|u(t)\|_{H^1} < \infty \implies (T_{\min}, T_{\max}) = \infty.$$

時間局所適切に関して, 次の結果が知られている.

定理 2.2 ((NLS_V) の時間局所適切 I, [6]). $d = 3$, $1 < p < 5$, $V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3)$, $V \geq 0$ とする. このとき, (NLS_V) は時間局所適切である. ここで,

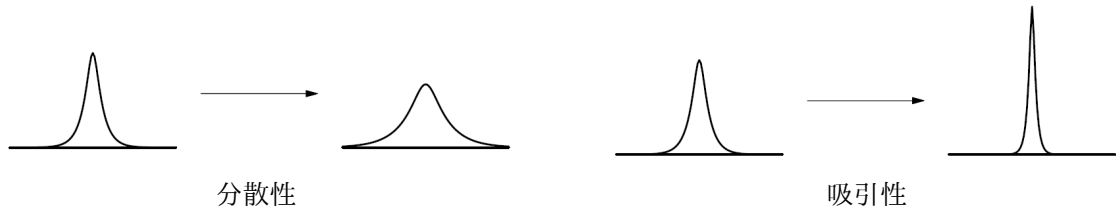
$$\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3) := \overline{\{f \in L^\infty(\mathbb{R}^3) : \text{supp } f \text{ はコンパクト}\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}}}, \quad \|f\|_{\mathcal{K}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(y)|}{|x-y|} dy.$$

定理 2.3 ((NLS_V) の時間局所適切 II, [2]). $d \geq 3$, $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$, $V \in L^\gamma(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ for some $\frac{d}{2} < \gamma \leq \infty$ とする. このとき, (NLS_V) は時間局所適切である.

定理 2.2 と定理 2.3 で得られた (NLS_V) の解 u は次の質量とエネルギーを時間に関して保存する.

$$\begin{aligned} (\text{質量}) \quad M[f] &:= \|f\|_{L^2}^2, \\ (\text{エネルギー}) \quad E_V[f] &:= \frac{1}{2} \|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|f\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} V(x) |f(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

時間局所適切が得られたとき, 解の時間発展による挙動を調べるのが時間に依存した非線形偏微分方程式の研究の 2 つ目である. (NLS_V) の解の時間発展を考えた際, 線形部分 ($i\partial_t u + \Delta_V u$) は分散的にはたらき, 非線形部分 ($-|u|^{p-1}u$) は吸引的にはたらく. 分散性は波を散らばらせ, 吸引性は波を集中させる.



線形部分と非線形部分の働きが逆であり, これらの兼ね合いにより様々な種類の時間挙動が存在する. 分散効果の方が吸引効果より強いとき, 解 u は空間遠方に向かっていく. そのため, 解 u 自身の相互作用が弱まり線形状態に近づく. このような挙動を散乱といい, このような解を散乱解と呼ぶ. 吸引効果の方が分散効果より強いとき, 解 u はあるところに集中していく. このような挙動を爆発といい, このような解を爆発解と呼ぶ. 爆発は有限時間爆発と無限時間爆発の 2 つに分けられる. 分散効果と吸引効果が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる. このような解を定在波解と呼ぶ. これらの挙動を数学的に記述すると以下ようになる.

定義 2.4 (散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解). $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ とする.

- (散乱解)

(NLS_V) の解 u が正 (負) の時間で散乱するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに, ある $\psi_+ \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ($\psi_- \in H^1(\mathbb{R}^d)$) が存在して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - e^{it\Delta_V} \psi_+\|_{H^1} = 0, \quad \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{it\Delta_V} \psi_-\|_{H^1} = 0 \right)$$

が成立することである. ここで, $e^{it\Delta_V} \psi_+$ ($e^{it\Delta_V} \psi_-$) は ψ_+ (ψ_-) を初期値にもつ線形方程式の解である.

- (有限時間爆発解)

(NLS_V) の解 u が正 (負) の時間で有限時間爆発するとは, $T_{\max} < +\infty$ ($T_{\min} > -\infty$) をみたすことである.

- (無限時間爆発解)

(NLS_V) の解 u が正 (負) の時間で無限時間爆発するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\limsup_{t \rightarrow -\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right)$$

が成り立つことである.

- (定在波解)

ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t, x) = e^{i\omega t} Q_{\omega, V}(x)$$

の形をしているとき, 解 u は定在波解であるという. ここで, $Q_{\omega, V} = Q_{\omega, V}(x)$ は楕円型方程式

$$-\omega Q_{\omega, V} + \Delta_V Q_{\omega, V} = -|Q_{\omega, V}|^{p-1} Q_{\omega, V} \quad (\text{SP}_{\omega, V})$$

の解である.

3 先行結果

近年 Kenig–Merle [13] による研究を始め, (SP _{ω, V}) の解を用いた解の時間挙動の分類が盛んに行われている. Kenig–Merle [13] は $d = 3, 4, 5$, $p = 1 + \frac{4}{d-2}$ の下, 次を示した. もし $u_0 \in \dot{H}_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d)$ が

$$E_0[u_0] < E_0[Q_{0,0}], \quad \|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla Q_{0,0}\|_{L^2}$$

をみたすとき, (NLS₀) の解 u は時間両方向で散乱する, そして, もし $u_0 \in \dot{H}_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ が

$$E_0[u_0] < E_0[Q_{0,0}], \quad \|\nabla u_0\|_{L^2} > \|\nabla Q_{0,0}\|_{L^2}$$

をみたすとき, (NLS_0) の解 u は時間両方向で有限時間爆発することを示した. Holmer–Roudenko [9] は $d = 3, p = 3, u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3)$ の下, (NLS_0) に関して Kenig–Merle [13] に類似した結果を得た. より正確には, もし $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3)$ が

$$M[u_0]E_0[u_0] < M[Q_{1,0}]E_0[Q_{1,0}], \quad \|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2} < \|Q_{1,0}\|_{L^2}\|\nabla Q_{1,0}\|_{L^2} \quad (1)$$

をみたすとき (NLS_0) の解 u は時間両方向で散乱する, もし $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d)$ が

$$M[u_0]E_0[u_0] < M[Q_{1,0}]E_0[Q_{1,0}], \quad \|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2} > \|Q_{1,0}\|_{L^2}\|\nabla Q_{1,0}\|_{L^2} \quad (2)$$

をみたすとき (NLS_0) の解 u は時間両方向で有限時間爆発することを示した. Duyckaerts–Holmer–Roudenko [4] は Holmer–Roudenko [9] の散乱の結果において球対称の仮定を外した. Holmer–Roudenko [10] は [9] の有限時間爆発の仮定から球対称を外し, 爆発が起こることを示した. より一般的な次元 d と非線形項の冪 p の下, Fang–Xie–Cazenave [5] は (NLS_0) に関する散乱の結果, Akahori–Nawa [1] は (NLS_0) に関する散乱の結果, 爆発の結果, 有限時間爆発の結果を示した. Fang–Xie–Cazenave [5] は (1), (2) のような形の条件を用いた. 一方, Akahori–Nawa [1] は次の形の条件を用いた.

$$S_{\omega,0}(u_0) < S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}), \quad K_{\omega,0}^{d,2}(u_0) \geq 0$$

の下, 散乱の結果を示し,

$$S_{\omega,0}(u_0) < S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}), \quad K_{\omega,0}^{d,2}(u_0) < 0$$

の下, 爆発の結果, 有限時間爆発の結果を示した. ここで,

$$S_{\omega,V}(f) := \frac{\omega}{2}M[f] + E_V[f], \quad K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) := \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} S_{\omega,V}(e^{\alpha\lambda}f(e^{\beta\lambda}\cdot)).$$

Du–Wu–Zhang [3] は (NLS_0) に関する爆発の結果の別証明を与えた.

次にポテンシャル $V \neq 0$ をもつ (NLS_V) に関する先行研究を紹介する.

定理 3.1 (Hong [11]). $d = 3, p = 3, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ とする. $V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3), V \geq 0, x \cdot \nabla V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3), x \cdot \nabla V \leq 0$ とする. もし, u_0 が

$$M[u_0]E_V[u_0] < M[Q_{1,0}]E_0[Q_{1,0}], \quad \|u_0\|_{L^2}\|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}}u_0\|_{L^2} < \|Q_{1,0}\|_{L^2}\|\nabla Q_{1,0}\|_{L^2}$$

をみたすとする, (NLS_V) の解 u は時間両方向で散乱する.

定理 3.2 (H.–Ikeda, [6]). $d = 3, \frac{7}{3} < p < 5, s_c = \frac{3}{2} - \frac{2}{p-1}, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ とする. $V \geq 0, x \cdot \nabla V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ とする. u_0 は次をみたすと仮定する.

$$M[u_0]^{1-s_c}E_V[u_0]^{s_c} < M[Q_{1,0}]^{1-s_c}E_0[Q_{1,0}]^{s_c}.$$

(1) (散乱) もし $V \in L_{\text{rad}}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3), x \cdot \nabla V \leq 0,$

$$\|u_0\|_{L^2}^{1-s_c}\|\nabla u_0\|_{L^2}^{s_c} < \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{1-s_c}\|\nabla Q_{1,0}\|_{L^2}^{s_c}$$

が成り立つとすると, (NLS_V) の解 u は散乱する.

(2) (爆発) もし $V \in (L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3)) \cup L^\sigma(\mathbb{R}^3)$ for some $\frac{3}{2} < \sigma \leq \infty$, $2V + x \cdot \nabla V \geq 0$,

$$\|u_0\|_{L^2}^{1-s_c} \|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}} u_0\|_{L^2}^{s_c} > \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{1-s_c} \|\nabla Q_{1,0}\|_{L^2}^{s_c}$$

が成り立つとすると, (NLS_V) の解 u は時間両方向で爆発する. さらに, 次の (i) もしくは (ii) が成り立つとき, (NLS_V) の解 u は時間両方向で有限時間爆発する.

(i) $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3)$, $V \in L_{\text{rad}}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $x \cdot \nabla V \geq 0$,

(ii) $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^3)$.

4 主結果

定理 3.1 と定理 3.2 ではポテンシャル V がいないときの $(\text{SP}_{1,0})$ の解 $Q_{1,0}$ を用いて解の分類を行っている. そこで, (NLS_V) と対応した $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解を用いた分類を行いたい. しかしながら, 一般に $(\text{SP}_{\omega,V})$ が解をもつかどうかは不明である. そこで, 本研究では $(\text{SP}_{\omega,V})$ を調べる. $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解は $S_{\omega,V}$ の最小化問題として特徴づけられるため, 以下の最小化問題を取り扱う.

$$\begin{aligned} m_{\omega,V} &:= \inf \left\{ S_{\omega,V}(f) : f \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}, K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) = 0 \right\}, \\ r_{\omega,V} &:= \inf \left\{ S_{\omega,V}(f) : f \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}, K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

$K_{\omega,V}^{1,0}$ はネハリ汎関数, $K_{\omega,V}^{d,2}$ はビリアル汎関数と呼ばれ, 次のように表される.

$$\begin{aligned} K_{\omega,V}^{1,0}(f) &:= \omega \|f\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ K_{\omega,V}^{d,2}(f) &:= 2 \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla V) |f(x)|^2 dx - \frac{d(p-1)}{p+1} \|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

ネハリ汎関数は $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解析において使用されることが多い汎関数である. ビリアル汎関数は (NLS_V) の時間挙動を調べる際に使用されることが多い汎関数である. 本研究の主結果を述べるため, 次を定義する.

$$\omega_0 := -\frac{1}{2} \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} (2V + x \cdot \nabla V),$$

$$\alpha > 0, \quad \beta \geq 0, \quad 2\alpha - d\beta \geq 0. \quad (3)$$

(3) は次の不等式を導く.

$$2\alpha - (d-2)\beta > 0, \quad (p+1)\alpha - d\beta > (p-1)\alpha - 2\beta > 0.$$

ここで, 本研究の主結果を述べる.

定理 4.1 (H.-Ikeda). $d \geq 3$, $1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ とする.

- (Non-radial case) $V, x \cdot \nabla V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) + L^\sigma(\mathbb{R}^d)$ ($\frac{d}{2} < \sigma < \infty$), $V \geq 0$, $x \cdot \nabla V < 0$, $2V + x \cdot \nabla V \geq 0$ とする. このとき, (3) をみたす各 (α, β) と各 $\omega > 0$ に対して $m_{\omega,V}^{\alpha,\beta} = m_{\omega,0}^{\alpha,\beta}$ が成り立つ, そして $m_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ は達成されない.

- (Radial case) $V, x \cdot \nabla V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $x \cdot \nabla V \leq 0$, $\omega_0 < \infty$ とする. このとき, (3) をみたす各 (α, β) と $\omega \geq \omega_0$ をみたす各 $\omega > 0$ に対して $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ は達成される.

定理 4.2 (H.–Ikeda). $d \geq 3$, $1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ とする.

- (Non-radial case) $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $2V + x \cdot \nabla V \geq 0$ とする.
 - $V \in L^\gamma(\mathbb{R}^d) + L^\sigma(\mathbb{R}^d)$, $x \cdot \nabla V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) + L^\sigma(\mathbb{R}^d)$ for some $\frac{d}{2} < \gamma \leq \sigma < \infty$, $x \cdot \nabla V \leq 0$ とする. ある (3) をみたす (α, β) と $\omega > 0$ が存在して

$$S_{\omega,V}(u_0) < m_{\omega,V}^{\alpha,\beta}, \quad K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u_0) \geq 0$$

をみたすとする. このとき, (NLS_V) の解 u は時間両方向で大域的に存在する.

- $E_V[u_0] < 0$, $V \in L^\gamma(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ for some $\frac{d}{2} < \gamma \leq \infty$, $x \cdot \nabla V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき, (NLS_V) の解 u は時間両方向で爆発する. 加えて $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ であるとき, (NLS_V) の解 u は時間両方向で有限時間爆発する.
- (Radial case) $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, V : 球対称とする. $x \cdot \nabla V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $x \cdot \nabla V \leq 0$, $\omega_0 < \infty$ とする. さらに, V は次の (i) もしくは (ii) をみたすとする.
 - (i) $d = 3$, $V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3)$,
 - (ii) $d \geq 3$, $V \in L^\gamma(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ for some $\frac{d}{2} < \gamma \leq \infty$.
 ある (3) をみたす (α, β) と $\omega \geq \omega_0$ をみたす $\omega > 0$ が存在して

$$S_{\omega,V}(u_0) < r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}, \quad K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u_0) \geq 0$$

が成り立つとする. このとき, (NLS_V) の解 u は時間両方向で大域的に存在する.

注意 4.3. 定理 4.1 (Radial case) の最小元が $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解であるかどうかは不明である. $\beta = 0$ における最小元は $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解である ([7]).

注意 4.4. $V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^3)$ のとき, $\omega_0 > 0$ である. これは $\omega_0 \leq 0$ と仮定すると, ある $r_0 > 0$ が存在して, 任意の $r = |x| \geq r_0$ に対して $V(r) \gtrsim \frac{1}{r^2}$ となることから従う.

注意 4.5. (NLS_V) と対応した $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解を用いた分類に関しては次の結果が与えられている. 具体的なポテンシャルについて, Ikeda–Inui [12] によりデルタポテンシャル $V = \delta$, Killip–Murphy–Visan–Zheng [14] により逆 2 乗ポテンシャル $V = \frac{a}{|x|^2}$ の場合について調べられている. 抽象的なポテンシャルについて, Nakanishi [15], [16] により質量が十分小さい場合に調べられている.

5 定理 4.1 (Radial case) について

この章では, 定理 4.1 (Radial case) において ω_0 を導入した動機と $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ の最小元の取り方の概略を紹介する.

まず, ω_0 を導入する動機を説明する. $(\text{SP}_{\omega,V})$ の解 $Q_{\omega,V}$ が存在し, $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ を達成すると仮定する. $(\text{SP}_{\omega,V}) \times Q_{\omega,V}$ の積分より

$$\omega \|Q_{\omega,V}\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}} Q_{\omega,V}\|_{L^2}^2 = \|Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$(\text{SP}_{\omega,V}) \times x \cdot \nabla Q_{\omega,V}$ の積分より

$$\frac{d}{2}\omega\|Q_{\omega,V}\|_{L^2}^2 + \frac{d-2}{2}\|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}}Q_{\omega,V}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(2V+x\cdot\nabla V)|Q_{\omega,V}(x)|^2dx = \frac{d}{p+1}\|Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

が形式的には得られる. これらの等式より, ポホザエフの等式

$$\begin{aligned} \|\nabla Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(x\cdot\nabla V)|Q_{\omega,V}(x)|^2dx &= \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \\ \omega\|Q_{\omega,V}\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d}(2V+x\cdot\nabla V)|Q_{\omega,V}|^2dx &= \frac{d+2-(d-2)p}{2(p+1)}\|Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1} \end{aligned}$$

が導かれる. 従って,

$$S_{\omega,V}(Q_{\omega,V}) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|Q_{\omega,V}\|_{L^{p+1}}^{p+1} > 0, \quad K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(Q_{\omega,V}) = 0$$

が成り立つ. つまり $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) = 0$ の下, $S_{\omega,V}(f) \geq 0$ とならなければならない. $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta} = 0$ を用いて $S_{\omega,V}$ を書き直すと

$$\begin{aligned} T_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) &:= S_{\omega,V}(f) - \frac{1}{2\alpha - (d-2)\beta}K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) \\ &= \frac{\beta}{2\{2\alpha - (d-2)\beta\}}\int_{\mathbb{R}^d}(2\omega + 2V + x\cdot\nabla V)|f(x)|^2dx + \frac{(p-1)\alpha - 2\beta}{(p+1)\{2\alpha - (d-2)\beta\}}\|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

この等式から

$$2\omega + 2V + x\cdot\nabla V \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d,$$

つまり,

$$2\omega + \text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^d}(2V + x\cdot\nabla V) \geq 0$$

であれば $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f) = 0$ の下, $S_{\omega,V}(f) \geq 0$ が保証されることがわかる. このため, ω_0 を導入する.

次に $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ の最小元の取り方の概略を述べる. 最小化列 $\{f_n\} \subset H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ を取る. つまり, $\{f_n\}$ は

$$\begin{aligned} K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f_n) &= 0, \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}, \\ S_{\omega,V}(f_n) &= T_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f_n) \searrow r_{\omega,V}^{\alpha,\beta} \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

をみたす. さらに, $\{f_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^d)$ で有界であることがわかる. それ故, ある関数 $f_\infty \in H^1(\mathbb{R}^d)$ と $\{f_n\}$ の部分列が存在して $f_n \rightharpoonup f_\infty$ in H^1 とできる. さらに, 埋め込み $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$ ($1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$) はコンパクトであるから, $\{f_n\}$ の部分列を取ることによって $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^{p+1} とできる. この関数 f_∞ は

$$T_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f_\infty) = r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}, \quad K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f_\infty) \leq 0$$

をみたす. $0 < \lambda \leq 1$ を $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(\lambda f_\infty) = 0$ をみたすように取ると

$$r_{\omega,V}^{\alpha,\beta} \leq S_{\omega,V}(\lambda f_\infty) = T_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(\lambda f_\infty) \leq T_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(f_\infty) = r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$$

となり, λf_∞ が $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ を達成することがわかる.

6 定理 4.2 の時間大域解について

この章では, 定理 4.2 の時間大域存在の証明を紹介する. (Non-radial case) は (Radial-case) と同様にして示せるので, (Radial case) のみ考える.

まず, $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u_0) = 0$ のときは $r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ の定義と $S_{\omega,V}(u_0) < r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ から $u_0 \equiv 0$ となる. このとき, (NLS_V) の解は一意的から $u(t, x) \equiv 0$ となり, これは時間大域解である. $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u_0) > 0$ の場合を考える. このとき, $S_{\omega,V}(u_0) < r_{\omega,V}^{\alpha,\beta}$ と $S_{\omega,V}$ が時間に関して保存されていることから, 任意の $t \in (T_{\min}, T_{\max})$ に対して

$$K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u(t)) > 0 \quad (4)$$

が従う. 実際, ある $t_1 \in (T_{\min}, T_{\max})$ が存在して $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u(t_1)) \leq 0$ をみたとすると, (NLS_V) の解 u の H^1 ノルムに関する連続性から, ある $t_0 \in (T_{\min}, T_{\max})$ が存在して $K_{\omega,V}^{\alpha,\beta}(u(t_0)) = 0$ が成立する. この t_0 に対して

$$S_{\omega,V}(u_0) < r_{\omega,V}^{\alpha,\beta} \leq S_{\omega,V}(u(t_0)) = S_{\omega,V}(u_0)$$

となり, 矛盾が生じる. 不等式 (4) と $\omega \geq \omega_0$ は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} &> -\frac{\omega\{2\alpha - (d-2)\beta\}}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2\alpha - (d-2)\beta}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}} \int_{\mathbb{R}^d} (2\omega + 2V + x \cdot \nabla V) |u(t, x)|^2 dx \\ &\geq -\frac{\omega\{2\alpha - (d-2)\beta\}}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2\alpha - (d-2)\beta}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

を意味する. この不等式を用いると

$$\begin{aligned} r_{\omega,V}^{\alpha,\beta} &> S_{\omega,V}(u(t)) \\ &= \frac{\omega}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &> \frac{\omega}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|(-\Delta_V)^{\frac{1}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \frac{\omega\{2\alpha - (d-2)\beta\}}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2\alpha - (d-2)\beta}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{\omega\{(p-1)\alpha - 2\beta\}}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{(p-1)\alpha - 2\beta}{2\{(p+1)\alpha - d\beta\}}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\sim \|u(t)\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

が得られる. 注意 2.1 より, (NLS_V) の解 u は時間大域的に存在する.

参考文献

- [1] T. Akahori and H. Nawa, *Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrödinger equations*, Kyoto J. Math. **53** (3): 629–672.

- [2] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp. ISBN: 0-8218-3399-5.
- [3] D. Du, Y. Wu, and K. Zhang, *On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 7, 3639–3650.
- [4] T. Duyckaerts, J. Holmer, and S. Roudenko, *Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, Math. Res. Lett. **15** (2008), no. 6, 1233–1250.
- [5] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave, *Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation*. Sci. China Math. **54** (2011), no. 10, 2037–2062.
- [6] M. Hamano and M. Ikeda, *Global dynamics below the ground state for the focusing Schrödinger equation with a potential*. to appear in Journal of Evolution Equations, arXiv:1903.03830.
- [7] M. Hamano and M. Ikeda, *Global well-posedness below the ground state for the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential*, submitted.
- [8] M. Hamano and M. Ikeda, *Global well-posedness to the intercritical NLS with a linear potential*, preprint.
- [9] J. Holmer and S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, Commun. Math. Phys. **282** (2008), no. 2, 435–467.
- [10] J. Holmer and S. Roudenko, *Divergence of infinite-variance nonradial solutions to the 3D NLS equation*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 5, 878–905.
- [11] Y. Hong, *Scattering for a nonlinear Schrödinger equation with a potential*, Commun. Pure Appl. Anal. **15** (2016), no. 5, 1571–1601.
- [12] M. Ikeda and T. Inui, *Global dynamics below the standing waves for the focusing semilinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential*, Anal. PDE **10** (2017), no. 2, 481–512.
- [13] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.
- [14] R. Killip, J. Murphy, M. Visan, and J. Zheng, *The focusing cubic NLS with inverse-square potential in three space dimensions*, Differ. Integral Eq. **30** (2017), no. 3–4, 161–206.
- [15] K. Nakanishi, *Global dynamics above the first excited energy for the nonlinear Schrödinger equation with a potential*, Comm. Math. Phys. **354** (2017), no. 1, 161–212.
- [16] K. Nakanishi, *Global dynamics below excited solitons for the nonlinear Schrödinger equation with a potential*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), no. 4, 1353–1401.