

THE RELATION BETWEEN BERKOVICH GEOMETRY AND BIRATIONAL GEOMETRY

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系 修士課程 2 年
Master's Course, Department of mathematics, Kyoto University
後藤 慶太 (Keita GOTO)¹

1. INTRODUCTION

代数多様体 X に付随する Berkovich 解析空間 X^{an} を考える．その各点は後述するように multiplicative seminorm により与えられる．すると，その点 x に対して Berkovich double residue field $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ と呼ばれる対象を定義できる．今回の結果は，点の中でも **monomial valuation** と呼ばれる点に対する **Berkovich double residue field** の具体的な表示を求めると共に，それが X の双有理モデル Y 上のある点における剰余体に一致している というものである．

本来であれば，Berkovich 幾何の基本的なところから説明するのが筋だとは思いますが，幸い今回の結果自体を理解する上でいくつかの事実を認めておけばそこまで詳しく述べる必要性をあまり感じないため，適当に事実を紹介しつつ Berkovich 幾何の雰囲気伝えながら今回の結果について紹介をしていこうと思う．

但し，一般的な代数幾何の知識は仮定する．

2. PRELIMINARIES

2.1. Berkovich spaces associated to algebraic varieties.

$\mathcal{A}$ を単位元を持つ環とする．

Definition 2.1.

$\mathcal{A}$ 上の *seminorm* とは，関数 $|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって，

- (1) $|0| = 0$,
- (2) $|f - g| \leq |f| + |g| \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$,
- (3) $|fg| \leq |f||g| \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$

を満たすもののこと．

さらに，*seminorm* $|\cdot|$ の性質として次のようなものがある．

- $|\cdot| : \text{norm} \iff “|f| = 0 \Rightarrow f = 0,”$
- $|\cdot| : \text{multiplicative} \iff |fg| = |f||g| \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$,
- $|\cdot| : \text{non-Archimedean} \iff |f - g| \leq \max\{|f|, |g|\} \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$

¹k.goto@math.kyoto-u.ac.jp

$\|\cdot\|$ を $\mathcal{A}$ 上の norm とすると, (2) と norm の定義によりこれは $\mathcal{A}$ 上の距離関数となり, これにより $\mathcal{A}$ は距離空間となる.

Definition 2.2.

$\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ を *normed ring* とする. このとき $\mathcal{A}$ が *Banach 環* とは $\mathcal{A}$ が上で定めた距離空間として完備であることをいう.

また, 可換体であり, *Banach 環* であるようなものを *Banach field* という.

さらに, $\|\cdot\|$ が *multiplicative* ならば *valuation field* といい, 加えて $\|\cdot\|$ が *non-Archimedean* でもあるときには特に *non-Archimedean field* という.

Example 2.3.

- 任意の環は次で定める trivial norm $|\cdot|_0$ により Banach 環となる.

$$|f|_0 = \begin{cases} 1 & (\text{if } f \neq 0) \\ 0 & (\text{if } f = 0) \end{cases}$$

また, 定義から分かるように, $|\cdot|_0$ は non-Archimedean norm である. さらに整域ならば, *multiplicative* でもある.

- $\mathbb{C}$ に対し, hybrid norm と呼ばれる次のノルムを考えると Banach 環となる.

$$|z|_{\text{hyb}} := \max\{|z|_0, |z|_\infty\} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

ただし, $|\cdot|_0$ は trivial norm, $|\cdot|_\infty$ は $\mathbb{C}$ 上の通常の絶対値とする.

- $(k, \|\cdot\|_k)$ を non-Archimedean field とする. このとき,

$$k\{r^{-1}T\} := \{f = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_i T^i \mid a_i \in k, \|f\| := \sup \|a_i\|_k r^i < \infty\}$$

とすれば, $k\{r^{-1}T\}$ は, 定義に現れる norm により Banach 環となる.

- complete DVR (例えば, $\mathbb{C}[[t]]$) は, uniformizing parameter の値を 1 未満の正の実数に定めることで一意に norm が定まり, 自然に Banach 環となる.

Berkovich 解析空間とは, 端的に言えば, multiplicative seminorm からなる集合に適切な位相 (や付加構造) を入れたものである.

そこで一般的な Berkovich 解析空間を定義する代わりに代数多様体に付随する Berkovich 解析空間を定義しよう.

Definition 2.4.

k : Banach field とする. A : 有限生成 k 代数とし, $U = \text{Spec} A$ とする. このとき, U^{An} を A 上の **multiplicative seminorm** であって, k 上に制限すると k の持つノルムに対して **bounded** となるもの全体とし, その

位相を $\forall f \in A$ に対して, $f : U^{\text{An}} \rightarrow \mathbb{R}$ (defined by $|\cdot| \mapsto |f|$) が連続となるような *weakest topology* で定める.

一般の k 上の代数多様体 X に対しては, X の各 *affine open* U に対し, 上のように U^{An} を定め, 適切な意味で貼り合わせることによって X^{An} を実現する. この X から X^{An} を得る操作を X の *Berkovich Analytification* という.

この k 上の代数多様体 X に対する *Berkovich analytification* に対して, 自然な連続写像 $\pi_X : X^{\text{An}} \rightarrow X$ が各 *affine open* に対してそこ上で定まる *seminorm* の *kernel* を取ることで定まる.

便宜的に, k :non-Archimedean field なら, $X^{\text{an}} := X^{\text{An}}$ とする.

さて, k は non-Archimedean field とし, X を k 上の代数多様体とする.

今 $x \in X^{\text{an}}$ に対して, $\pi_X(x)$ の剰余体 $\kappa(\pi_X(x))$ 上に x から誘導される自然な norm が定まり, これも便宜上 x と呼ぶことにする.

Definition 2.5.

$x \in X^{\text{an}}$ に対して, $\mathcal{H}(x)$ を $\kappa(\pi_X(x))$ の x から誘導される自然な norm による完備化とする.

このとき, $\mathcal{H}(x)$ は non-Archimedean field となる.
これに対して,

$$\mathcal{H}(x)^\circ := \{f \in \mathcal{H}(x) \mid |f|_x \leq 1\},$$

$$\mathcal{H}(x)^{\circ\circ} := \{f \in \mathcal{H}(x) \mid |f|_x < 1\}$$

とすると,

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)} := \mathcal{H}(x)^\circ / \mathcal{H}(x)^{\circ\circ}$$

が定まり, これは体になる. (付値体 $\mathcal{H}(x)$ に対する剰余体)

この $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ を Berkovich double residue field という.

この $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ の具体計算はいくつかの場合において先行結果が知られている. [Ber90] [BR10]

今回の結果では一部重複があるもののそれらとは異なるクラスである後述の monomial valuation と呼ばれる点について $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ の具体計算を行った.

2.2. Centers.

k は trivial norm を備えた体とする. このとき, k は non-Archimedean field となる. 今, $X, X^{\text{an}}, \pi_X : X^{\text{an}} \rightarrow X$ は上と同様のものを考える.

$x \in X^{\text{an}}$ に対し, valuation ring R_x を次で定める.

$$R_x := \{f \in \kappa(\pi_X(x)) \mid |f|_x \leq 1\}.$$

まずは, $X = \text{Spec} A$ の場合について $A/\pi_X(x) \subset R_x$ を仮定するとき,

$$c_X(x) := \{f \in A \mid |f| < 1\}$$

を $c_X(x)$ と書き, x の **center** という. これは, $A \rightarrow A/\pi_X(x) \hookrightarrow R_x$ によって定まる写像 $\varphi_{x,X} : \text{Spec} R_x \rightarrow X$ による $\text{Spec} R_x$ の唯一の閉点の行先として定まるものと一致している.

次に, X を k 上 **proper** とすると, 以下の可換図式から **Valuative criterion** [Har77] により, 写像 ${}^{\exists!}\varphi_{x,X} : \text{Spec} R_x \rightarrow X$ が誘導される.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \kappa(\pi_X(x)) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \varphi_{x,X} & \downarrow \\ \text{Spec} R_x & \longrightarrow & \text{Spec} k \end{array}$$

この誘導された写像 $\varphi_{x,X}$ による $\text{Spec} R_x$ の唯一の閉点の行先を $c_X(x)$ と定める.

このとき, 各々で定義した x の **center** について, 次の包含が成立している.

$$\kappa(c_X(x)) \subset \widetilde{\mathcal{H}(x)}.$$

さて, $x \in X^{\text{an}}$ が **norm** とすると, $\pi_X(x)$ の剰余体は X の関数体に一致している.

$$\kappa(\pi_X(x)) = K(X).$$

すると, 関数体上に **norm** が定まっているため, **birational map** $Y \dashrightarrow X$ に対して, 自然に $x \in Y^{\text{an}}$ とみなせる. 特に, 任意の **open affine set** $U \subset X$ に対して, $x \in U^{\text{an}}$ が成り立つ.

今, **norm** $x \in X^{\text{an}}$ に対して **center** が定まるとき (つまり, 上で見たいずれかの場合), **blow-up** $f : Y \rightarrow X$ に対して, 次の可換図式が得られるが, ここに再び **Valuative criterion** を適用することで, ${}^{\exists!}\varphi_{x,Y} : \text{Spec} R_x \rightarrow Y$ を得る.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} K(X) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow \varphi_{x,Y} & \downarrow \\ \text{Spec} R_x & \xrightarrow{\varphi_{x,X}} & X \end{array}$$

すると, $\text{Spec} R_x$ の閉点のそれぞれの写像に対する行先として $c_Y(x)$, $c_X(x)$ を考えることによって

$$f(c_Y(x)) = c_X(x)$$

を得る. 特に, 次が成立している.

$$\kappa(c_X(x)) \subset \kappa(c_Y(x)) \subset \widetilde{\mathcal{H}(x)}.$$

もちろん、一般的には $\kappa(c_X(x)) \neq \widehat{\mathcal{H}(x)}$ となるわけだが、上手く blow-up を取り birational model を取り換えてあげることで、 $\kappa(c_Y(x)) = \widehat{\mathcal{H}(x)}$ となるような Y が構成できないかというのが、主結果の背景にある。

2.3. Monomial valuations.

ここでは、主結果を語る上で重要な norm に関するクラスを定義する。

まず、体上の多項式環 $A = k[X_1, \dots, X_n]$ を考える。

このとき、 A 上の monomial valuation とは、正の実数 $r_1, \dots, r_n$ が存在して、

$$f = \sum_{I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_I X^I \in k[X_1, \dots, X_n]$$

に対して、次で定まる multiplicative norm のことである。

$$|f| := \max_{a_I \neq 0} |r^I|.$$

但し、 $I = (i_1, \dots, i_n)$ に対し、 $r^I = r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$ とする。

このとき、monomial valuation x は k を trivial norm を備えた non-Archimedean field としたときの $(\text{Spec} A)^{\text{an}}$ の元となる。

一方で、このままの定義ではあまりに限定的であるため一般化したもののだが、その上で、Cohen の構造定理を用いる。

k を trivial norm を備えた non-Archimedean field とする。 X を k 上の代数多様体とし、 $p \in X$ を非特異な点 (閉点とは限らない) とする。このとき、Cohen の構造定理により、 $\kappa(p) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ が (一意ではないが) 存在して、 $\mathcal{O}_{X,p}$ の正則巴系を $f_1, \dots, f_m$ とすれば、residue field の埋め込み方に応じて次のべき級数環への $\kappa(p)$ -代数としての同型が得られる。

$$\widehat{\mathcal{O}_{X,p}} \cong \kappa(p)[[t_1, \dots, t_m]].$$

ここで、上の同型は $f_i \mapsto t_i$ として定まる。

さて、上の条件の下、 $p \in X$ 上の monomial valuation とは、1 未満の正の実数 $r_1, \dots, r_n$ が存在して、

$$f = \sum_{I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} a_I f^I \in \mathcal{O}_{X,p} \subset \kappa(p)[[f_1, \dots, f_m]]$$

に対して、次で定まる multiplicative norm のことである。

$$|f| := \max_{a_I \neq 0} |r^I|.$$

但し、 $I = (i_1, \dots, i_m)$ に対し、 $r^I = r_1^{i_1} \cdots r_m^{i_m}$ とする。

一見この定義では、 $p \in X$ 上の monomial valuation は正則巴系の取り方とそれに対する値の選び方、そして、residue field の埋め込み方に

依存すると思われるが, residue field の埋め込み方には依らないことが知られている. [JM10]

明らかではあるが, 上のように定義される monomial valuation x において, $c_X(x) = p$ が成り立つ.

こうして, X の非特異な点において monomial valuation を定義することが出来た. そこで次は特異な点について考えてみたい. そのために商特異点を念頭に有限群で割ることを考えたい.

k を trivial norm を備えた non-Archimedean field とし, X を k 上の代数多様体とする. 群 G が X に作用するとは, 群準同型 $G \rightarrow \text{Aut} X$ が存在することを言う. 但し, $\text{Aut} X$ は k -scheme としての X の自己同型がなす群である. 簡便のため, 上の写像を通して $\sigma \in G$ とその像を同一視する.

このとき, norm $x = |\cdot| \in X^{\text{an}}$ が G -invariant とは

$$|f| = |\sigma^\sharp(f)| \quad \forall f \in K(X), \forall \sigma \in G$$

が成り立つことを指す. ここで, $\sigma^\sharp : K(X) \rightarrow K(X)$ は自己同型 $\sigma : X \rightarrow X$ から誘導される同型である.

非特異点 $p \in X$ に対して, 上のように x を p 上の monomial valuation とする. このとき, x が G -invariant ならば p は G の固定点となる. (一般的にこういう固定点が商特異点になりうる.) 特に G を有限群とするとき, p の open affine neighborhood $U = \text{Spec} A$ in X であって, G の作用で閉じているものが取れる. すると, A の G による不変式環 A^G を用いて, $A^G \hookrightarrow A$ に付随する幾何学的商 $\phi : U \rightarrow U/G$ を得る. Berkovich Analytification には関手性があるため, 自然に Berkovich 解析空間としての射 $\phi^{\text{an}} : U^{\text{an}} \rightarrow (U/G)^{\text{an}}$ が取れる. このとき, $y = \phi^{\text{an}}(x)$ の center は $\phi(p)$ となる.

3. MAIN THEOREMS

こうして, 今回の主結果を紹介する準備が整った. 以下は筆者の修士論文において得られた結果である.

まずは今回の最も基礎になる定理である.

Theorem 3.1. k を trivial norm を備えた non-Archimedean field とし, 次のいずれかが成立するとする.

- (1) $X = \text{Spec} A$ は k 上の affine variety で, x は A 上の multiplicative norm であって $A \subset R_x$ を満たす.
- (2) X は k 上の proper variety で $x \in X^{\text{an}}$ は norm.

$\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ が 剰余体 $\kappa(c_X(x))$ 上 体として有限生成ならばある blow-up $\pi : X' \rightarrow X$ が存在して次を満たす.

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \kappa(c_{X'}(x)).$$

この定理から、 $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ はある双有理モデルにおける x の center に対する剰余体と同一視できることが分かる。

次は、monomial valuation における具体計算についての定理である。

Theorem 3.2. $x = |\cdot|$ を多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ 上の monomial valuation とする。

このとき、 $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ は k 上の有理関数体であって、具体的にその生成元を与えることができる。

非特異な点上の monomial valuation についても、近似を考えることによって、多項式環における上の Theorem 3.2 に帰着させることができ、具体的な生成元に対し適当な blow-up を Theorem 3.1 のように取ることで次の定理を得る。

Theorem 3.3. k を trivial norm を備えた non-Archimedean field とする。 X を k 上の代数多様体とし、 $p \in X$ を非特異な点とする。

このとき、 $p \in X$ 上の monomial valuation x に対して、 $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ は $\kappa(p)$ 上の有理関数体であり、具体的に生成元を与えることができる。更に、ある blow-up $\pi: X' \rightarrow X$ が存在して次を満たす。

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \kappa(c_{X'}(x)).$$

こうして、非特異な点上の monomial valuation x に対しては、 $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ が X の閉部分多様体に関係付けられた。そこで、代数多様体における有限群による商に関する一般論 ([Muk03] 等参照) から、次のことが分かる。

Theorem 3.4. k を trivial norm を備えた non-Archimedean field とする。 X を k 上の代数多様体とし、 $p \in X$ を非特異な点とする。 G を X に作用する有限群とし、その位数は k の標数と互いに素とする。 x を p 上の G -invariant monomial valuation とする。このとき、 U を p を含む G の作用で閉じている affine neighborhood とし、幾何的商 $U \rightarrow U/G$ から誘導される自然な写像 $U^{\text{an}} \rightarrow (U/G)^{\text{an}}$ による $x \in U^{\text{an}}$ の像を y とすれば、

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)}^G = \widetilde{\mathcal{H}(y)}$$

が従う。

このように、基礎体 k を trivial norm を備えた体として、いくつかの結果を見てきた。

最後は基礎体 K を complete DVF として得られた結果を紹介する。但し、この付値体 K に対して $\tilde{k}$ をその剰余体とすると、 $\tilde{k}$ の標数は 0 を仮定する。これは本質的な部分ではないのだが、後述の quasi monomial

valuation を考える際に、特異点解消をする部分があり、それが実行できるための条件である。

X を nonsingular projective K -variety とする。このとき、その Berkovich Analytification X^{an} は代数多様体の退化現象に関する非常に興味深い性質を持っている。詳細は [BFJ14] に譲るが、 $x \in X^{\text{an}}$ のクラスとして、quasi-monomial valuation という性質が定義される。

すると、この quasi-monomial valuation 全体は X^{an} の dense な subset になることが知られている。

最後の定理は、この quasi-monomial valuation に対して、monomial valuation の場合と同様の性質が成り立つことを主張している。

Theorem 3.5. K を complete DVF として、その付値環を R とし、剰余体を $\tilde{k}$ とする。 $\tilde{k}$ の標数は 0 とし、 X を nonsingular projective K -variety とする。このとき、quasi monomial valuation $x \in X^{\text{an}}$ に対して X の model $\mathcal{X}$ が存在して、 $\mathcal{H}(x) = \kappa(c_{\mathcal{X}}(x))$ を満たす。

ここで、 X の model $\mathcal{X}$ とは、 R 上有限型の flat integral scheme $\mathcal{X}$ で $\mathcal{X} \times_{\text{Spec} R} \text{Spec} K \cong X$ となるような R 上 projective normal variety のことである。

Remark 3.6.

X の model とは、幾何的には 1 次元の disc への全射を備えた多様体であって、その原点を除いた punctured disc 上で常に X を fibre として持つようなものである。

blow-up などを考えれば明らかなように model に一意性はない（存在すれば無数に非自明なものが構成できる）。一方で、 X が K 上 projective であることから X を閉部分多様体として持つような K 上の射影空間 $\mathbb{P}_K^N$ に対して自明な central fibre の埋め方 $\mathbb{P}_K^N \subset \mathbb{P}_R^N$ を考えたのちに、その拡張された空間 $\mathbb{P}_R^N$ での X の閉包を取ることで model の存在は常に言える。[BFJ14]

Remark 3.7.

上で用いている center は厳密には今回紹介した center の定義からは得られないが、全く同様に、以下の可換図式を考えて Valuative criterion から得られる写像 $\varphi_{x,\mathcal{X}} : \text{Spec} R_x \rightarrow \mathcal{X}$ による $\text{Spec} R_x$ の閉点の像として定義している。

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} K(X) & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \nearrow \varphi_{x,\mathcal{X}} & \downarrow \\ \text{Spec} R_x & \longrightarrow & \text{Spec} R \end{array}$$

REFERENCES

- [Ber90] V. G. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*, American Mathematical Society, 1990.

- [BFJ14] S. Boucksom, C. Favre, and M. Jonsson, *Singular semipositive metrics in non-archimedean geometry*, arXiv:1201.0187, 2014.
- [BR10] M. Baker and R. Rumely, *Potential theory and dynamics on the berkovich projective line*, American Mathematical Society, 2010.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [JM10] M. Jonsson and M. Mustașă, *Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals*, 2010.
- [Muk03] S. Mukai, *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2003.