

大型のクリークを持つ有限グラフの rotational dimension

名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
五明工 (Takumi GOMYOU)

1 はじめに

$G = (V, E)$ を単純な有限グラフとしその頂点数を n とおく. このとき次のようなグラフのユークリッド空間への埋め込みエネルギー最大化問題を考える.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in V} \|v_i\|^2 \\ & \text{subject to} && \left\| \sum_{i \in V} v_i \right\|^2 = 0, \\ & && \|v_i - v_j\| \leq 1, \quad \forall ij \in E, \\ & && v_i \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in V. \end{aligned} \tag{1}$$

この問題は, absolute algebraic connectivity と呼ばれる最適値を与える離散ラプラシアン正最小固有値の最大化問題の, 半正值プログラミングの意味での双対問題として得られる. Göring-Helmberg-Wappler は問題 (1) を導出し, グラフの頂点と辺上のパラメータを加えて問題 (1) を一般化した. その最適埋め込みが実現できる空間の最小次元から rotational dimension というグラフ不変量が定義される. 本研究では rotational dimension を用いた完全グラフの特徴付けを行い, さらに弦グラフの rotational dimension について考察をした.

2 埋め込み問題と rotational dimension

グラフ $G = (V, E)$ の辺に重み $w = {}^t(\cdots w_{ij} \cdots) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|E|}$ を与える. グラフ G の (辺の重み付き) ラプラシアン行列 $L_w(G)$ は各成分が次のように定義される $n \times n$ 半正值行列である.

$$(L_w(G))_{ij} = \begin{cases} \sum_{ik \in E} w_{ik}, & i = j, \\ -w_{ij}, & ij \in E, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

G が連結のとき $L_w(G)$ は固有値 0 を 1 つだけ持つ. すなわち $L_w(G)$ の固有値は次のように並べられる.

$$0 = \lambda_1(L_w(G)) < \lambda_2(L_w(G)) \leq \cdots \leq \lambda_n(L_w(G)).$$

Fiedler は正最小固有値 $\lambda_2(L_w(G))$ を最大化する問題を導入し, その最適値 $\hat{a}(G)$ を *absolute algebraic connectivity* と呼んでいる [1].

$$\hat{a}(G) = \max\{\lambda_2(L_w(G)) \mid \sum_{ij \in E} w_{ij} = |E|, w \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|E|}\}.$$

この最適化問題の双対問題としてグラフ埋め込み問題 (1) が導出される [2].

頂点にパラメータ $s = {}^t(\cdots s_i \cdots) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ と辺にパラメータ $l = {}^t(\cdots l_{ij} \cdots) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|E|}$ を与えたとき, 問題 (1) はパラメータ付きとして一般化される:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in V} s_i \|v_i\|^2 \\ & \text{subject to} && \left\| \sum_{i \in V} s_i v_i \right\|^2 = 0, \\ & && \|v_i - v_j\| \leq l_{ij}, \quad \forall ij \in E, \\ & && v_i \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in V. \end{aligned} \tag{2}$$

この問題における最適埋め込みが実現可能な空間の最小次元から rotational dimension と呼ばれるグラフ不変量が定義される.

定義 1 (rotational dimension [3]).

$$\begin{aligned} \text{rotdim}_G(s, l) &:= \min\{\dim \text{span}\{v_i \mid i \in V\} \mid \{v_i \mid i \in V\} \text{ は (2) の最適解}\}, \\ \text{rotdim}(G) &:= \max\{\text{rotdim}_G(s, l) \mid s \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|V|}, l \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|E|}\}. \end{aligned}$$

ここで $\dim \text{span}\{v_i \mid i \in V\}$ は $\{v_i \mid i \in V\}$ によって張られる線形部分空間の次元である. $\text{rotdim}(G)$ をグラフ G の *rotational dimension* と呼ぶ.

rotational dimension は, $\lambda_2(L_w(G))$ の重複度が動機となって案出された概念である. 次の定理 1 で記すように rotational dimension はグラフのマイナーによる順序列に対して単調に変化する, すなわちマイナーモノトーンなグラフ不変量である. グラフ G のマイナーグラフとは, G から辺の除去, 辺の縮約, 孤立頂点の除去を繰り返し行うことで得られるグラフ $\tilde{G}$ のことであり, このとき $G \succeq \tilde{G}$ と表す.

定理 1 ([3]). $G \succeq \tilde{G}$ であるならば $\text{rotdim}(G) \geq \text{rotdim}(\tilde{G})$ が成り立つ.

ラプラシアン正最小固有値の重複度と関連する別の不変量に Colin de Verdière number $\mu(G)$ [5] や valid representation から定義される $\lambda(G)$ [4] などが知られている. $\mu(G)$ や $\lambda(G)$ もまたマイナーモノトーンな不変量であり, マイナーモノトーン性以外にも $\text{rotdim}(G)$ と共通する性質をいくつか持っている. 例えば n 頂点完全グラフの rotational dimension は $n - 1$ であり, 他の量でも同じ値を与える.

命題 2.

$$\text{rotdim}(K_n) = n - 1.$$

注意 1. 問題 1 における完全グラフ K_n の最適埋め込みは $n - 1$ 次正則単体として実現され, それは原点における回転の自由度を除いて一意的な最適解である.

定理 1 と命題 2 によって rotational dimension は clique number によって下から評価される.

定義 2 (clique number). グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\omega(G) := \max\{|V(K)| \mid K \text{ は } G \text{ の完全部分グラフ (クリーク)}\}$$

を G の *clique number* という. ただし $|V(K)|$ は K の頂点数である.

命題 3.

$$\text{rotdim}(G) \geq \omega(G) - 1.$$

また tree-width によって上からの評価も与えられる.

定義 3 (tree-decomposition, tree-width). グラフ $G = (V, E)$ の *tree-decomposition* とは, 頂点集合が $V(T) \subset 2^V$ であり, 次を満たすような tree T のことである.

- (i) $V = \bigcup_{U \in V(T)} U$,
- (ii) $\forall e \in E, \exists U \in V(T), \text{ s.t. } e \subset U$,
- (iii) $U_1, U_2, U_3 \in V(T)$ において,
 T 内で $\text{path} : U_1 \rightarrow U_2$ が U_3 を通るなら $U_3 \supset U_1 \cap U_2$ である.

グラフ G とその tree-decomposition T に対して

$$w(T) := \max\{|U| - 1 \mid U \in V(T)\}$$

を T の width という. ただし $|U|$ は U が含む G の頂点数である. さらに

$$\text{tw}(G) := \min\{w(T) \mid T \text{ は } G \text{ の tree-decomposition}\}$$

を G の tree-width という.

定理 4 ([3]).

$$\text{tw}(G) + 1 \geq \text{rotdim}(G).$$

3 主結果

本研究ではまず rotational dimension による完全グラフの特徴付けを行った.

定理 5. n 頂点グラフ G において, $G = K_n$ であることの必要十分条件は $\text{rotdim}(G) = n - 1$ が成り立つことである.

この定理は $\lambda(G)$ に置き換えた場合でも同様の結果があり, そこから類推した. この定理の証明は, 完全グラフ K_n から 1 辺 e を取り除いたグラフ $K_n \setminus \{e\}$ の rotational dimension を決定することによってなされる.

また弦グラフと呼ばれるグラフに着目し, $K_n \setminus \{e\}$ のようにサイズの大きいクリークを持つグラフの rotational dimension についても考察した.

定義 4 (弦グラフ). 弦グラフとはその内部にある長さ 4 以上の全ての閉路が弦を持つグラフである. 弦とは閉路内の 2 頂点をつなぐ辺で閉路を構成しないものをいう.

一般にグラフ G に対して

$$\text{tw}(G) + 1 \geq \text{rotdim}(G) \geq \omega(G) - 1$$

が成り立つことを述べたが, G が弦グラフのときこれらの不等式評価はタイトになり, 次を得る.

$$\text{rotdim}(G) = \omega(G) - 1, \text{ or } \omega(G).$$

この性質を用いることで, rotational dimension を固定したままサイズの大きなグラフを構成できる.

定理 6. G は $\text{rotdim}(G) = \omega(G)$ を満たす弦グラフとし, $\widehat{G}$ は G を部分グラフに持つ弦グラフで $\omega(\widehat{G}) = \omega(G)$ を満たすものとする. このとき次が成り立つ.

$$\text{rotdim}(\widehat{G}) = \text{rotdim}(G).$$

参考文献

- [1] Fiedler, M.: Laplacian of graphs and algebraic connectivity. *Combinatorics and Graph Theory*. 25, 57-70 (1989)
- [2] Göring, F., Helmberg, C. and Wappler, M.: Embedded in the Shadow of the Separator. *SIAM J. Optim.* 19(1), 472-501 (2008)
- [3] Göring, F., Helmberg, C. and Wappler, M.: The rotational dimension of a graph. *J. Graph Theory*. 66(4), 283-302 (2011)
- [4] Van der Holst, H., Laurent, M. and Schrijver, A.: On a Minor-Monotone Graph Invariant. *J. Comb. Theory*. 65(2), 291-304 (1995)
- [5] Van der Holst, H., Lovász, L. and Schrijver, A.: The Colin de Verdière graph parameter. *Graph Theory and Combinatorial Biology*. 29-85. János Bolyai Mathematical Society. Budapest (1999)