Branched twist spin の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_3)$-表現

東京学芸大学教育学部/ JSPS PD
福田瑞季 (Mizuki Fukuda)

概要

Branched twist spin とは Pao によって定義された 4 次元球面内の 2 次元ファイバー結び目であり，ツイストスパン結び目の一般化である．古典的な結び目に関しては，その補空間の基本群から有限群への表現を用いた結び目の判定が研究されており，その起こりとして Fox の彩色による研究が知られている．本稿では branched twist spin の補空間の基本群が持つ性質に着目し，$SL(2,\mathbb{Z}_3)$ への表現に関する結果を述べる．

1 Introduction

4 次元球面に滑らかに埋め込まれた 2 次元球面を 2 次元結び目という．2 つの 2 次元結び目 K と K' が同値であるとは，4 次元球面の全同位で結び目が移りあうときをいい，この同値関係を $K \sim K'$ と書くことにする．

2 次元結び目の研究は大きくわけて次の 2 つの方針で進められている．

- 一般の結び目に対する不変量の構成
- 具体的な構成がわかっている結び目の判別

前者に関しては，カンドルを用いた代数的手法やチャートなどを用いた図式的研究が行われているが，本稿の話では後者の方針での研究なので説明は割愛する．後者に関しては結び目自体がはっきりわかっているので簡単そうに思えるが，実際はかなり難しい．例えば，2 次元結び目に関しては，その結び目が自明 (つまり 3 次元球の境界と同値) であるための必要十分条件は知られていない．また，結び目が 2 つの非自明な結び目に分解できないときその結び目を素であるというが，その判別方法は知られていない．さらに現在までに知られている結び目のクラスは多くなく，まとめると図 1 のように書ける．

歴史的には，非自明な 2 次元結び目の最初の例としてスパン結び目と呼ばれる 2 次元結び目を Artin が構成した．後に Zeeman によってツイストスパン結び目，Litherland に よって Deformed スパン結び目が構成された．これらは Artin の構成法を一般化したものであるが，実際に

$$\{\text{ スパン結び目 }\} \subsetneq \{\text{ ツイストスパン結び目 }\} \subsetneq \{\text{Deformed スパン結び目 }\}$$

というように，真に大きなクラスになっていることが知られている．一方，Pao は S^1 作用を用いて 2 次元結び目を構成した (詳細は次章を参照)．この結び目はスパン結び目の一部を除いてファイバー結び目 (補空間が S^1-束の構造をもつ) であり，そのファイバーはスパン結び目やツイストスパン結び

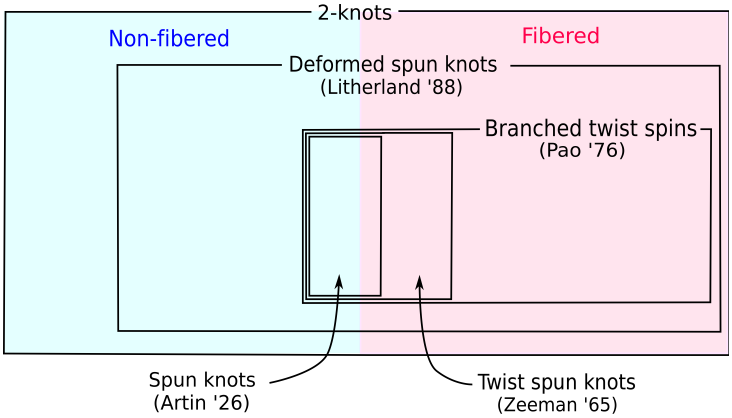


図 1　Examples of 2-knots

目のファイバーと一致することが構成方法からわかる．さらに，Hillman と Plotnick によって 2 次元ファイバー結び目が branched twist spin であることと， そのモノドロミーが周期的であることは同値ということを示している [4]．このことから，branched twist spin は 1 次元結び目の トーラス結び目に対応するクラスであり，重要である．Branched twist spin の特徴として，古典的な結び目と同様に，その結び目群 (補空間の基本群) が必ず非自明な中心を持つことが挙げられる．そこで，非自明な中心をもつ有限表示群として，$SL(2,\mathbb{Z}_3)$ への表現を考えることにする．

2　Branched twist spin

この章では branched twist spin の定義とその結び目群の表示の説明をする．

局所滑らかで効果的な S^4 上の S^1 作用を考える．E_m を $\mathbb{Z}_m$-タイプの例外軌道全体の集合とし，F を固定点集合とする．また， E_m^* と F^* をそれぞれ E_m と F の軌道写像による像とする．Montgomery と Yang によって，局所滑らかで効果的な S^4 上の S^1 作用は次の 4 つのタイプに分類できることが知られている；(1) $\{D^3\}$,(2) $\{S^3\}$, (3) $\{S^3, m\}$, (4) $\{(S^3, K), m, n\}$ [5]. ここで，D^3 や S^3 は軌道空間を表す．(4) について， 和集合 $E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 の中で 1 次元結び目 K となっていて，$E_n \cup F$ は S^4 の中で 2 次元結び目となっている．(3) については，端点が F^* となるような弧 A^* に対しその逆像と F の和集合が 2 次元結び目となっている．これはツイストスパン結び目と呼ばれる 2 次元結び目である．(2) や (3) は (4) の $n = 1$ もしくは $m = 1$ の場合であることに留意して，branched twist spin は次のように定義される．

定義 2.1 (Branched twist spin)**.** K を S^3 内の 1 次元結び目とする．互いに素な自然数のペア (m, n) に対し，K の (m, n)-*branched twist spin* を $E_n \cup F$ で定め， $K^{m,n}$ と書くことにする．また m=0 のとき，$K^{0,1}$ を K のスパン結び目という．

注意 2.2. 任意の 1 次元結び目を実現するような S^1-作用が存在する [1, 6].

結び目群の表示を得るため，S^4 の S^1-作用による分解について説明する．$K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ に対し $N(K)$ を K のコンパクトな管状近傍とする．このとき，軌道空間 S^3 は次のように分解で

きる．

$$S^3 = (D_1^{3*} \sqcup D_2^{3*}) \cup (E_n^{c*} \times D^2) \cup (E_m^{c*} \times D^2) \cup X. \tag{2.1}$$

ここで X は $S^3 \setminus \mathrm{int}N(K)$，$D_1^{3*} \sqcup D_2^{3*}$ は F^* はコンパクトな近傍，E_m^{c*} と E_n^{c*} はそれぞれ $E_m^{c*} \subset E_m^*$，$E_n^{c*} \subset E_n^*$ となるような $K \setminus \mathrm{int}(D_1^{3*} \cup D_2^{3*})$ 内の部分集合である (図 2 を見よ)．この

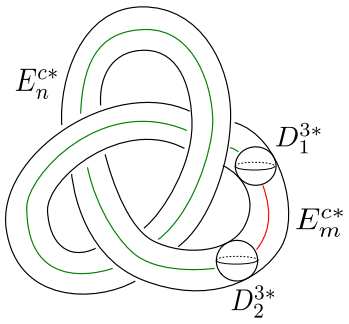


図 2　Decomposition of $N(K)$

分解を用いて S^4 を次のように分解する．軌道写像 $p : S^4 \to S^3$ に対し，$H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$ なので，$p^{-1}(X)$ は $X \times S^1$ であり，$p|_{X \times S^1} : X \times S^1 \to X$ は第一成分への射影である．次に $p^{-1}(D_i^{3*})$ の linear slice は 4 次元球体であるので，これを B_i^4 とおく．ある点 $z_m^* \in E_m^{c*}$ に対し，$D_{z_m^*}^{2*}$ を z_m^* を中心とし，E_m^{c*} と横断的な円盤とする．このとき，$p^{-1}(D_{z_m^*}^{2*})$ はコアにのみ $\mathbb{Z}_m$-タイプの例外軌道をもつソリッドトーラス V_m である．同様にして，ある点 $z_n^* \in E_n^{c*}$ に対し，$D_{z_n^*}^{2*}$ を z_n^* を中心とし，E_n^{c*} と横断的な円盤とする．このとき，$p^{-1}(D_{z_n^*}^{2*})$ はコアにのみ $\mathbb{Z}_n$-タイプの例外軌道をもつソリッドトーラス V_n である．よって S^4 は 5 つの連結なピースに分解される：

$$S^4 \cong (B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1).$$

それぞれのピースに S^4 の向きから定まる座標を定め，ファンカンペンの定理を用いると結び目群は次のような表示を持つことがわかる：

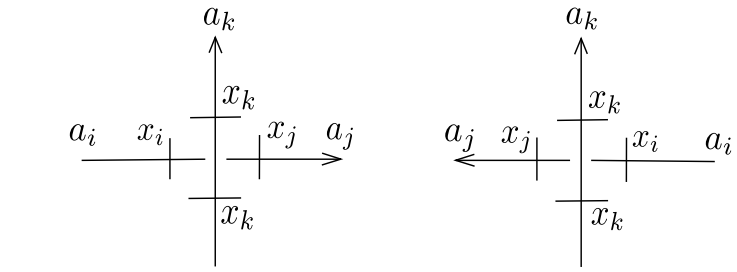
$$\begin{aligned} \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K^{m,n})) &\cong \pi_1(X \times S^1) * \pi_1(D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \\ &\cong \langle x_1, \ldots, x_l, h \mid r_1, \ldots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle \end{aligned}$$

ここで，$\langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l \rangle$ は Wirtinger 表示と呼ばれる古典的な結び目の結び目群に対する表示で，図 3 のような生成元と関係式を用いて構成できる．また，β は $n\beta \equiv 1 \ (\mathrm{mod}m)$ を満たす整数である．この β は上記のピースの貼り合わせが一意ではなく，$D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2$ のメリディアン分の自由度があるために現れる．上の群表示を見るとすぐにわかるように h は結び目群の非自明な中心である．

3　主定理

1 章でも述べたように 2 次元結び目の分類はほとんどなされておらず，branched twist spin だけでも現在までの研究では区別不能なケースは無数に存在する．

現在までに知られている branched twist spin の分類に対する結果は以下の 3 つである．



r_i : $x_k x_i x_k^{-1} x_j^{-1}$ $x_k x_j x_k^{-1} x_i^{-1}$

図 3　Wirtinger 表示

定理 3.1 (Plotnick [7])**.** K を非自明なトーラス結び目または双曲結び目とする．このとき，$m \geq 3$ かつ $m > n$ であれば $K^{m,n}$ は非自明である． □

定理 3.2 (F.[2])**.** 2 つの branched twist spin $K_1^{m_1,n_1}, K_2^{m_2,n_2}$ が異なるための十分条件は以下の 2 つである；

- m_1, m_2 がともに偶数で， $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq |\Delta_{K_2}(-1)|$
- m_1 が偶数，m_2 が奇数で， $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq 1$ □

定理 3.3 (F. [3])**.** K を非自明な結び目とし，m を奇数とする．このとき $K^{m,n} \not\sim K^{m,m+n}$. □

$SL(2,\mathbb{Z}_3)$ は群表示として次の表示を持つ；

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = abc \rangle.$$

これは 三角群の 2 重被覆に対応する binary 三角群 $\Gamma(p,q,r)$ と呼ばれるものの特殊な例 $(p = q = 3, r = 2)$ としての群表示である．関係子から明らかに abc は群の中心であり，実際に位数が 2 の非自明な元であることが確かめられる． 2 章で branched twist spin の結び目群表示は

$$\langle x_1, \ldots, x_l, h \mid r_1, \ldots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle$$

として与えられており，以下では表現 $\rho : \langle x_1, \ldots, x_l, h \mid r_1, \ldots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle \to \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = abc \rangle$ のうち， $\rho(h) = abc$ となるものを考える．この ρ は次を満たす．

定理 3.4. 非自明な branched twist spin $K^{m,n}$ に対し上記の $SL(2,\mathbb{Z}_3)$-表現 ρ の数は

- m が 4 の倍数ならば 0 つ
- m が偶数かつ 4 の倍数でないならば 6 つ
- m が奇数かつ 3 の倍数でないならば 1 つ □

注意 3.5. 定理 3.4 において m が奇数かつ 3 の倍数であるときは ρ の個数は K に依存する．これは Z_3 の位数が 3 であることに由来しており， 一般に 素数 p に対して $SL(2,\mathbb{Z}_p)$-表現を考えると p の倍数のときの表現の個数は K に依存する．しかしどういった K の幾何学的性質が反映されているかはまだわかっていない．

参考文献

[1] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[2] M. Fukuda, *Irreducible* SL(2, $\mathbb{C}$)*-metabelian representations of branched twist spins*, J. Knot Theory and its Ramifications, Vol.28, No.02, (2019), 1950007.

[3] M. Fukuda, *Gluck twists on branched twist spins*, preprint.

[4] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fibred two-knots*, Math. Ann. **287** (1990), 259–273.

[5] D. Montgomery and C. T. Yang, *Groups on* S^n *with principal orbits of dimension n-3*, **I**, **II**, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517.;**5** (1961), 206–211. Proc. Conf. on Transformation Groups (New Orleans, 1967), Springer-Verlag, New York (1968), 297–318.

[6] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[7] S. Plotnick, *Equivaliant intersection forms, knots in* S^4, *and rotations in 2-spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 543–575.