# SU($k$) 固定部分環を例とした AF C*-力学系についての Shannon-McMillan 定理

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学コース
藤川七海 (Nanami FUJIKAWA)

## 1　導入

エルゴード的力学系における Shannon-McMillan 型の定理は, 古典的な離散力学系の基本的な極限定理の 1 つである. Breiman による量子スピン格子系への拡張では, 離散確率分布の Shannon エントロピーの概念は, 密度行列の von Neumann エントロピーによって一般化されている. 本研究では, この Shannon-McMillan 型の定理に倣って, AF 環上の C* 力学系のエントロピーを具体的に計算する.

## 2　準備

$\mathbb{C}$ 上の環にノルムの概念を導入した代数系を Banach algebra と呼ぶ.

**定義 2.1** (C*-algebra)**.** $\mathscr{B}$ が単位的 Banach algebra であるとは, $\mathscr{B}$ が以下の 4 条件を満たすことである.

1. $\mathscr{B}$ は $\mathbb{C}$ 上の環である. すなわち, $\mathscr{B}$ は, 和・積・複素定数倍で閉じている.
2. 乗法の単位元として 1 をもつ.
3. ノルムが存在して, Banach 空間になっている. また, $\|1\| = 1$ である.
4. 積のノルムとノルムの積について, $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ が成り立つ. これは, 劣乗法性 (submultiplicativity) と呼ばれる性質である.

また, $A$ が単位的 C*-algebra であるとは, $A$ が次の 3 条件を満たすことである.

1. $A$ は単位的 Banach algebra である.
2. 写像 $*: A \to A$ で, $(a^*)^* = a, (a+b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^*a^*, (\lambda a)^* = \overline{\lambda}a^*$ を満たすもの (対合, involution) が存在する.
3. $T \in A$ に対して,$\|T^*T\| = \|T\|^2$ が成り立つ.

ただし, $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ とした.

有限次元 C*-algebra の増大列の閉包になっているものを AF C*-algebra と呼ぶ. すなわち, 有限

次元 C*-algebra $A_i$ と単射準同型 $\varphi_{ij}$ からなる系 $\{(A_i, \varphi_{ij}) : i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$ について, $\overline{\cup_i A_i}$ という形で書かれるものが AF algebra である.
ただし, $\varphi_{ij}$ は単射 *-準同型 $\varphi_{ij}\colon A_i \to A_j (i \leq j)$ で, $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ を満たすとする.

**定義 2.2** (AF C*-system)**.** $n, m, n', m'$ を不等式 $n' \leq n \leq m \leq m'$ を満たす任意の整数とする. 有限次元 C*-algebra $A_{[n,m]}$ に対して, $A_{[n,m]} \subset A_{[n',m']}$ が成り立つとする. 以下の条件を満たす組 $(A, \{A_{[n,m]}\}, \tau, \gamma)$ を AF C*-system と呼ぶ. ここで, $A_n = A_{[0,n-1]}$ と書くことにする.

1. $A$ は $A_{[n,m]}$で張られるAF algebra である. 特に, $A_{[n,m]} \subset A$ は単位元 $1_A$ を含む有限次元 C*-subalgebra である.
2. $\tau$ は $A$ 上の faithful tracial state で, 十分大きい $n_0$, $a \in A_{(-\infty,0]}, b \in A_{[n_0,\infty)}$ に対して, $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ を満たす.
3. $\gamma$ は $A$ の $\tau$ を保つ自己同型で, 任意の $n \leq m$ に対して, $\gamma(A_{[n,m]}) = A_{[n+1,m+1]}$ を満たす. すなわち, $A_{[n,m]} = \gamma^n A_{m-n+1}$ となる.

State の評価に必要となる計算のために密度行列とエントロピーの概念を導入する. ここで, 有限次元 C*-algebra $A$ は, 行列環の直和 $\oplus_i M_{n_i}$ と同型となることに注意する.

**定義 2.3** (密度行列)**.** Tr を行列の対角成分の和, $\psi$ を $A$ 上の state とする. 以下の定義は汎関数に対しても意味を持つ. このとき, $D_\psi \in A$ が $\psi$ の密度行列であるとは, $D_\psi$ が任意の $T \in A$ に対して $\psi(T) = \mathrm{Tr}(D_\psi T)$ を満たすということである.

**定義 2.4** (von Neumann エントロピー)**.** $\psi$ の von Neumann エントロピー $S(\psi)$ を, $S(\psi) = -\mathrm{Tr}(D_\psi \log D_\psi)$ で定義する.

# 3 Shannon-McMillan 型定理

**仮定 3.1.** $(A, \{A_{[n,m]}\}, \tau, \gamma)$ の組に, 以下の 2 条件を加える.

1. $n_0 > 0$ が存在して, $A_{(-\infty,0]}$ と $A_{[n_0,\infty)}$ が積について交換する.
2. $D_{\tau|_{A_n}}$ に対して, 極限 $\lambda_\tau = \lim_n -\frac{1}{n}\log D_{\tau|_{A_n}}$ が存在し, しかもスカラー値となる.

**命題 3.1.** $(A, \{A_{[n,m]}\}, \tau, \gamma\})$ を仮定を満たす AF C*-system とする. 任意の $\gamma$-invariant state $\omega$ に対して, $s(\omega) = \lim_n \frac{1}{n} S(\omega\mid_{A_n})$ が区間 $[0, \lambda_\tau]$ 内に存在する.

**定理 3.1** (Shannon-McMillan 型定理 ([1]))**.** $(A, \{A_{[n,m]}\}_{n\leq m}, \tau, \gamma)$ を仮定を満たす AF C*-system, $\omega$ を $A$ 上の $\gamma$-ergodic invariant state とする.
このとき, 任意の $\delta > 0$ に対して, 射影 $p_n \in A_n$ の列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して, 以下の 3 条件を満たす.

1. $\lim_{n\to\infty} \omega(p_n) = 1$
2. 任意の極小射影 $e \in A_n$ with $e \leq p_n$ に対して,

$$\mathrm{e}^{-n(s(\omega)+\delta)} \leq \omega(e) \leq \mathrm{e}^{-n(s(\omega)-\delta)}$$

3. 十分大きい $n$ に対して,

$$\mathrm{e}^{n(s(\omega)-\delta)} \le \mathrm{Tr}_{A_n} p_n \le \mathrm{e}^{n(s(\omega)+\delta)}$$

すなわち, $\omega(p_n)$ の大きさを $n$, $\delta$, エントロピーの極限 $s(\omega)$ によって評価することができる.

**例 3.1** ($A$: $2^\infty$ 型 UHF algebra)**.** $A_n$ を $M_{2^n} \simeq (M_2)^{\otimes n}$ とする. $\varphi_{n,n+1}$ を

$$\varphi_{n,n+1}\colon A_n \ni a \mapsto \mathrm{diag}(a,a) = a \otimes I_2 \in A_{n+1}$$

と定めると, $M_{2^\infty} = \overline{\cup_n M_{2^n}}$ は AF C*-algebra となり, これは $2^\infty$ 型 UHF algebra と呼ばれる代数系である. この系においては, 以下の図のように一次元格子に量子スピン, すなわち $\mathbb{C}^2$ 内の単位ベクトルが表す量子力学的状態が乗っていると考えることができる.

$$\cdots \bullet_{\mathbb{C}^2} \text{———} \bullet_{\mathbb{C}^2} \text{———} \bullet_{\mathbb{C}^2} \text{———} \bullet_{\mathbb{C}^2} \cdots$$

このとき, $\tau\mid_{A_n}$ やその密度行列, エントロピーは

$$\begin{aligned}
\tau\mid_{A_n} &= \frac{1}{2^n}\mathrm{Tr}_{\otimes_{i=1}^n M_2} = \frac{1}{2^n}\mathrm{Tr}_{M_{2^n}} \\
D_{\tau|_{A_n}} &= \frac{1}{2^n} I_{2^n} \\
\lambda_{\tau|_{A_n}} &= \log 2 \\
S(\tau\mid_{A_n}) &= n\log 2
\end{aligned}$$

と計算することができる. さらに, $\psi$ を

$$D_{\psi|_{M_2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t} & 0 \\ 0 & \frac{t}{1+t} \end{bmatrix} (t>1)$$

を密度行列とする $M_2$ 上の状態汎関数とする. $M_2$ 上の状態汎関数 $\omega$ を $\omega\mid_{A_n} = \psi^{\otimes n}$, すなわち密度行列を

$$D_{\omega|_{A_n}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t} & 0 \\ 0 & \frac{t}{1+t} \end{bmatrix}^{\otimes n}$$

と定める. このとき $s(\omega)$ は

$$s(\omega) = -\frac{t}{1+t}\log t + \log(1+t)$$

と計算することができる.

**例 3.2** ($A_n^{\mathrm{SU}(2)}$: SU(2) 固定部分環)**.** $n=2$ のとき, SU(2) の共役作用による固定部分環 $A_2^{\mathrm{SU}(2)}$ は, その既約表現に基づいて直和分解した空間への射影 $P_{0/2}, P_{2/2}$ を用いて

$$A_2^{\mathrm{SU}(2)} = \mathbb{C}P_{0/2} \oplus \mathbb{C}P_{2/2}$$

と書くことができる. これにより, 密度行列と von Neumann エントロピーを計算することができ, 具体的に

$$\begin{aligned}
D_{\tau|_{A_2^{\mathrm{SU}(2)}}} &= \frac{1}{4}P_{0/2} \oplus \frac{3}{4}P_{2/2} \\
S(\tau\mid_{A_2^{\mathrm{SU}(2)}}) &= 2\log 2 - \frac{3}{4}\log 3 \\
D_{\omega|_{A_2^{\mathrm{SU}(2)}}} &= \frac{t}{(1+t)^2}P_{0/2} \oplus \frac{1+t+t^2}{(1+t)^2}P_{2/2}
\end{aligned}$$

となる.

一般に, SU($k$) の $k$ 次行列環への共役作用による固定部分環の state のエントロピーは, もとの環のエントロピーの値以下になる. これは, $\omega$ の centralizer が固定部分環を含むことと, $\omega$ の centralizer への制限が tracial state になることを用いて導くことができる. ([2])
実際に $k = 2$ のとき, 例 3.1 で与えた state $\psi$, $\omega$, $D_{\omega|_{A_n^{\mathrm{SU}(2)}}}$ を用いて $\omega\,|_{A_n^{\mathrm{SU}(2)}}$ のエントロピーの極限 $s(\omega)$ を計算すると, UHF 環の場合と同じ値になる.
また, SU($k$) 固定部分環は, 無限置換群のユニタリ表現で生成されることが知られている. このユニタリ表現は, Young 図形が無限に成長していく様子を表す図（infinite Young tableau）のなす空間上の特定の確率測度に対応する. ([6]) さらに, Young 図形は Bratteli 図形のそれぞれの頂点を表し, これは対称群の表現それぞれと対応する. Young 図形の包含関係を含めて考えたものが Bratteli 図形に対応する. したがって, Bratteli 図形を用いれば SU($k$) 固定部分環の既約表現がわかる. これらのことから, SU($k$) 固定部分環における Shannon-McMillan 型定理を考えることができる.

# 参考文献


[1] Ogata, Yoshiko. “The Shannon-McMillan Theorem for AF C*-systems.” Letters in Mathematical Physics 103.12 (2013): 1367-1376.

[2] Neshveyev, Sergey, Størmer, Erling. ”Dynamical Entropy in Operator Algebras” (2006, Springer)

[3] Neshveyev, Sergey, Størmer, Erling. ”The McMillan Theorem for a class of asymptotically abelian C*-algebras.” Ergodic Theory and Dynamical Systems 22.3 (2002): 889-897.

[4] Jones, Vaughan FR. ”Index for subfactors.” Inventiones mathematicae 72.1 (1983): 1-25.

[5] Price, Geoffrey. ”Extremal traces on some group-invariant C*-algebras.” Journal of Functional Analysis 49.2 (1982): 145-151.

[6] Wassermann, Antony J. ”Automorphic actions of compact groups on operator algebras.” (1981).