

Riemann ゼータ関数の対数関数の反復積分の値の稠密性 について

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
遠藤健太 (Kenta Endo)

概要

Riemann ゼータ関数の臨界線上での値の集合が複素平面上で稠密になるかどうかは有名な未解決問題である。本講演では、Riemann ゼータ関数の対数関数を鉛直または水平線上で反復積分した関数に対しての同様の問題を考察する。この研究は、名古屋大学の井上翔太氏との共同研究である。講演者らは水平線上で反復積分した関数の臨界線上での値の集合は複素平面上で稠密になることを証明し、Riemann 予想の仮定の下では鉛直線上で反復積分した関数の臨界線上での値の集合も複素平面上で稠密になることを証明した。さらに、鉛直線上で2回以上反復積分した関数の臨界線上での値の集合が稠密になることと Riemann 予想が同値になることが証明できた。

1 導入と主結果

この研究は名古屋大学の博士後期課程の井上翔太氏との共同研究である。複素変数を $s = \sigma + it$ で表し、 σ は s の実部、 t は s の虚部とする。Riemann ゼータ関数は、半平面 $\sigma > 1$ の範囲では

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

という級数で定義される。この級数は複素全平面に解析接続されることが知られている。Riemann ゼータ関数の零点の分布は、素数の分布と密接に関わっており、その零点の分布を調べることは重要な問題となっている。Riemann ゼータ関数は、半平面 $\sigma > 1$ の範囲では

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

と Euler 積で表示できるので、この範囲において零点を持たないことがわかる。また、Riemann ゼータ関数の関数等式と呼ばれる公式から、半平面 $\sigma < 0$ の範囲では自明な零点 $s = -2, -4, \dots$ を除いて、Riemann ゼータ関数は零点を持たないことも知られている。したがって、臨界領域と呼ばれる帯領域 $0 \leq \sigma \leq 1$ の範囲での零点分布の研究が重要となる。しかし、臨界領域での Riemann ゼータ関数の値分布は非常に複雑で古典的に次の定理が知られている。

定理 1.1 (Bohr and Courant in 1914 [2]). 任意に固定された $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して、集合 $\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面において稠密となる。

定理 1.2 (Bohr in 1916 [1]). 任意に固定された $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して、集合 $\{\log \zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面において稠密となる。

これらの結果から, Riemann ゼータ関数の値の分布は非常に複雑であることがわかる. ここで, 他の領域における Riemann ゼータ関数の値分布に関する結果を紹介する. まず, $\sigma > 1$ の範囲においては集合 $\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は有界となることがわかる. $\sigma < 1/2$ の範囲においては, Garunkštis と Steuding [3] によって, Riemann 予想の仮定の下で, 集合 $\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密にならないことが知られている. したがって, 稠密性に関しては次の問題が残されている.

問題 1. 集合 $\{\log \zeta(1/2 + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密となるか?

Kowalski and Nikeghbali [5] によりこの問題に対する興味深い研究がなされている. 彼らは, ランダム行列理論に基づいたある強い仮定のもとで集合 $\{\log \zeta(1/2 + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は稠密になることを示している. 彼らの結果から, 問題 1 の答えは真であるようにも見える. しかしながら, Garunkštis と Steuding [3] により, 集合 $\{(\zeta(1/2 + it), \zeta'(1/2 + it)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}^2$ 上で稠密にはならないことが証明されている. これらの研究から, 現状ではこの問題の真偽を予想することすら困難であるように思える.

今回これらの問題に関しての新しい知見を得ることが出来たので, それを報告する. 任意の $m \in \mathbb{N}$ と $t > 0$ に対して, 関数 $\eta_m(s)$ を

$$\eta_m(\sigma + it) = \int_0^t \eta_{m-1}(\sigma + it') dt' + c_m(\sigma)$$

で定義する. ただし,

$$\begin{aligned} \eta_0(\sigma + it) &= \log \zeta(\sigma + it), \\ c_m(\sigma) &= \frac{i^m}{(m-1)!} \int_{\sigma}^{\infty} (\alpha - \sigma)^{m-1} \log \zeta(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

とする. これらの定義をするのに, まず $\log \zeta(s)$ の分枝を決めておく. $\log \zeta(s)$ の分枝は, 複素平面 $\mathbb{C}$ から, 集合

$$\left(\bigcup_{\rho=\beta+i\gamma} (-\infty, \beta] \times i\{\gamma\} \right) \cup ((-\infty, 1] \times i\{0\})$$

を取り除いた領域上で定義し, 実軸上で実数値をとるように定める. ただし, ρ は Riemann ゼータ関数の臨界領域に含まれる零点とする. 臨界領域に含まれる Riemann ゼータ関数の零点を非自明零点と呼ぶ. また, 上で取り除かれた集合上でも $\log \zeta(s)$ の値を次のように定義する. $t = 0$ のときは, $\log \zeta(\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \log \zeta(\sigma + i\varepsilon)$ で定める. t が非自明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の虚部と等しいとき, $\log \zeta(\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \log \zeta(\sigma + i(\gamma - \text{sgn}(\gamma)\varepsilon))$ で定める. 次に, 広義積分 $\eta_m(\sigma + it)$ を次のように定める. 集合 $[\sigma, \infty) \times i(0, t)$ に含まれる非自明零点全体を $\{\rho_j = \beta_j + i\gamma_j\}_{j=1}^k$ としたとき, 広義積分 $\eta_m(\sigma + it)$ を

$$\eta_m(\sigma + it) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{j=0}^k \int_{\gamma_j + \varepsilon}^{\gamma_{j+1} - \varepsilon} \eta_{m-1}(\sigma + it') dt'$$

で定義する. ただし, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{k+1} = t$ とする.

今回, 井上氏との共同研究により以下の結果を得ることができた.

定理 1.3. 任意に $1/2 \leq \sigma < 1$ をとる. もし $\beta > \sigma$ を満たす非自明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の個数が有限だとすると, 集合

$$\left\{ \int_0^t \log \zeta(\sigma + it') dt' \mid t \in [0, \infty) \right\}$$

は複素平面上で稠密となる. さらに, 任意の整数 $m \geq 2$ に対して, 次の主張が同値となる.

(I) Riemann ゼータ関数は, 実部が σ より大きい零点を持たない.

(II) 集合 $\{\eta_m(\sigma + it) \mid t \in [0, \infty)\}$ は複素平面上で稠密となる.

この定理から, Riemann 予想が正しいと仮定すると, 集合

$$\left\{ \int_0^t \log \zeta(1/2 + it') dt' \mid t \in [0, \infty) \right\}$$

は複素平面上で稠密となることもわかる.

また, 今回の研究の過程で他にも得られた結果があるのでそれを報告する. $\tilde{\eta}_m(\sigma + it)$ を

$$\tilde{\eta}_m(\sigma + it) = \int_{\sigma}^{\infty} \tilde{\eta}_{m-1}(\alpha + it) d\alpha,$$

で定義する. ただし, $\tilde{\eta}_0(\sigma + it) = \log \zeta(\sigma + it)$.

定理 1.4. 任意に $1/2 \leq \sigma < 1$ と自然数 m を固定する. また, 任意の $T_0 > 0$ をとる. このとき, 集合

$$\{\tilde{\eta}_m(\sigma + it) \mid t \in [T_0, \infty)\}$$

は, 複素平面上で稠密となる.

2 証明の概略

まず, 定理 1.4 の証明の概略から述べる. 任意の $\sigma \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1(\sigma + it) &= \int_{\sigma}^{\infty} \log \zeta(\alpha + it) d\alpha \\ &= \int_{\sigma}^{\infty} \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha + it}} \right)^{-1} d\alpha \\ &= \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{p^{k(\alpha + it)}} d\alpha = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{kp^{k(\alpha + it)} \log p} \right]_{\alpha=\sigma}^{\infty} \\ &= \sum_p \frac{1}{\log p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p^{-(\sigma + it)})^k}{k^2} \\ &= \sum_p \frac{\text{Li}_2(p^{-\sigma - it})}{\log p} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\text{Li}_m(z)$ は多重対数関数と呼ばれる関数で $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$ で定義されるものである。この計算を繰り返すことにより、任意の自然数 m と $\sigma \geq 1$ に対して、

$$\tilde{\eta}_m(\sigma + it) = \sum_p \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m}$$

を得る。 $1/2 \leq \sigma < 1$ の領域では、上の等式は成り立たないが、Riemann ゼータ関数が Dirichlet 級数の部分和で近似できるのと同様に、 X が十分大きいときに二乗平均の意味で

$$\tilde{\eta}_m(\sigma + it) \approx \sum_{p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m}$$

という近似が成り立つのではないかと考え、筆者らは次の命題を得た。

命題 2.1. 任意に自然数 m を固定する。このとき、任意の $\sigma \geq 1/2$, $T \geq X^{135}$, $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] \mid \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it) - \sum_{p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

が成り立つ。ただし、記号 $\text{meas}(\cdot)$ は 1 次元 Lebesgue 測度を表す。

この命題の証明は省略する。この命題から、任意の複素数と $\sum_{p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m}$ を近似できれば主張が示されることわかる。そして、筆者らは次の結果を得た。

命題 2.2. 任意に自然数 m と $1/2 \leq \sigma < 1$ を固定する。 a を任意の複素数、 ε を任意の正の実数とする。十分大きい $N_0 = N_0(m, \sigma, a, \varepsilon)$ をとる。このとき、任意の $N \geq N_0$ に対して、ある Jordan 可測な集合 $\Theta_0 = \Theta_0(m, \sigma, a, \varepsilon, N) \subset [0, 1)^{\pi(N)}$ で $\text{meas}(\Theta_0) > 0$ となるものが存在して、

$$\left| \sum_{p \leq N} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} \exp(-2\pi i \theta_p))}{(\log p)^m} - a \right| < \varepsilon.$$

が任意の $\underline{\theta} = (\theta_{p_n})_{n=1}^{\pi(N)} \in \Theta_0$ に対して成り立つ。

この命題の証明も省略する。この二つの命題から、定理 1.3 が示されることを見る。任意に自然数 m と $\varepsilon > 0$ を固定する。任意に複素数 a を取る。 $X > 0$ と $N > 0$ に対して、集合 $\mathcal{A}_T^X$ と $\mathcal{B}_T^N$ を

$$\mathcal{A}_T^X = \left\{ t \in [0, T] : \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it) - \sum_{p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon \right\}$$

$$\mathcal{B}_T^N = \left\{ t \in [0, T] : \left| \sum_{p \leq N} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m} - a \right| < \varepsilon \right\}.$$

で定義する。命題 2.2 より、 N が十分大きいとき、ある $\delta = \delta(m, \sigma, a, \varepsilon)$ が存在して、

$$\text{meas}(\mathcal{B}_T^N) > \delta T$$

が十分大きい T に対して成り立つ。また、命題 2.1 より、 $X \geq N$ が十分大きいとき、

$$\text{meas}(\mathcal{A}_T^X) > (1 - \delta/2)T$$

が十分大きい T に対して成り立つ. これらより, $\mathcal{A}_T^X \cap \mathcal{B}_T^N \neq \emptyset$ が十分大きい T に対して成り立つことがわかる. よって, T が十分大きいとき, ある $t_0 \in \mathcal{A}_T^X \cap \mathcal{B}_T^N$ が存在して,

$$\begin{aligned} & |\tilde{\eta}_m(\sigma + it_0) - a| \\ & \leq \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it_0) - \sum_{p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{p \leq N} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} - a \right| \\ & \quad + \left| \sum_{N < p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 最後の項の不等式は “ほとんどすべて” の $t \in [0, T]$ に対して, $\left| \sum_{N < p \leq X} \frac{\text{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon$ が成り立つことを示す必要があるが, これは省略する.

次に, 定理 1.3 を証明の概略を述べる. 次の公式を用いる.

$$\eta_m(\sigma + it) = i^m \tilde{\eta}_m(\sigma + it) + 2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0 < \gamma < t \\ \beta > \sigma}} (\beta - \sigma)^{m-k} (t - \gamma)^k \quad (1)$$

この公式は Littlewood の補題を用いて証明される. $m = 1$ のとき, 公式 (1) の右辺の第二項は t が十分大きいときに定数となる. これと定理 1.4 により, 主張が成り立つ. $m \geq 2$ のとき, (I) $\Rightarrow$ (II) を示す. Riemann ゼータ関数は, 実部が σ より大きい零点を持たないとする. このとき, 公式 (1) の右辺の第二項は

$$2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0 < \gamma < t \\ \beta > \sigma}} (\beta - \sigma)^{m-k} (t - \gamma)^k = 0$$

となる. これと定理 1.4 により主張が成り立つ. (II) $\Rightarrow$ (I) を対偶で示す. Riemann ゼータ関数が実部が σ より大きい零点を持つとする. このとき, 十分大きい t に対して,

$$2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0 < \gamma < t \\ \beta > \sigma}} (\beta - \sigma)^{m-k} (t - \gamma)^k \gg t^{m-1}.$$

が成り立つ. この公式と [4] にある $\tilde{\eta}_m(s) = O_m(\log t)$ という評価を用いることで, 十分大きな t に対して,

$$|\eta_m(\sigma + it)| \gg t^{m-1}$$

が成り立つことがわかる. これより, ある $T_0 > 0$ が存在して, 任意の $t > 0$ に対して

$$|\eta_m(\sigma + it)| > 1$$

が成り立つことがわかる. よって,

$$\overline{\{\eta_m(\sigma + it) \mid t \in [T_0, \infty)\}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \mid |z| \leq 1\}$$

が成り立つ。ただし, $\overline{A}$ は A の閉包を表す。これより,

$$\overline{\{\eta_m(\sigma + it) \mid t \in [T_0, \infty)\}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \mid |z| \leq 1\}$$

を得る。しかし, $\mu\left(\overline{\{\eta_m(\sigma + it) \mid t \in [0, T_0]\}}\right) = 0$ であることより,

$$\{z \mid |z| \leq 1\} \not\subset \overline{\{\eta_m(\sigma + it) \mid t \in [0, T_0]\}}$$

となる。ただし, μ は 2 次元 Lebesgue 測度を表す。以上より, 主張が示された。

参考文献

- [1] H. Bohr, Zur Theorie der Riemann'schen Zeta-funktion im kritischen Streifen, *Acta Math.* **40** (1916), 67–100.
- [2] H. Bohr and R. Courant, Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, *J. Reine Angew. Math.* **144** (1914), 249–274.
- [3] R. Garunkštis and J. Steuding, On the roots of the equation $\zeta(s) = a$, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **84** (2014), 1–15.
- [4] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, [arXiv:1909.03643](https://arxiv.org/abs/1909.03643).
- [5] E. Kowalski and A. Nikeghbali, Mod-Gaussian convergence and the value distribution of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ and related quantities, *J. London Math. Soc.* (2) **86** (2012), 291–319.