Vertical 3-manifolds in simplified genus 2 trisections of 4-manifolds

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
浅野喜敬 (Nobutaka ASANO)

概要

閉 4 次元多様体の trisection とは 4 次元の 1-ハンドル体 3 つの組による，多様体の分割である．これはある安定写像 (trisection map) を構成することにより得られる． 講演者は安定写像のホモトピー変形を用いることで，simplified (2, 0)-trisection map の値域の中の，特別な 3 つの弧の定める 3 次元多様体の組のリストを作成した．また，リストの各元と定義域多様体の対応を与えたので報告する．本稿は，単純な trisection の基礎的な事項について主に記した．より詳細な情報が知りたい場合は，[4] を参照されたい．

以下，断りのない限り多様体は連結とし，また，X は閉 4 次元多様体，M は閉 3 次元多様体，Σ_g を種数 g の閉曲面を表すとする．また，$\sharp^k A$(resp. $\natural^k A$) は k 個の A の連結和 (resp. 境界連結和) を表すとする．

1 導入

3 次元，4 次元多様体のトポロジーの研究は，主に多様体を簡単なパーツに分割し，その接着の様子を図示することで進められてきた．3 次元多様体の古典的な分割に，次の分割がある．

$$M = H_1 \cup_\partial H_2$$

ここで，H_i は種数 g のハンドル体 ($\simeq \natural^g(S^1 \times D^2)$) である．上記の分割は 3 次元多様体の Heegaard 分解と呼ばれ，古典的な 3 次元多様体の分割として知られている．Heegaard 分解により，2 つのハンドル体の接着の様子を曲面上の曲線族として図示することができる．これは Heegaard 図式と呼ばれ，3 次元多様体の位相的な性質を曲面上の曲線族を用いて解析することを (ある程度) 可能にする．

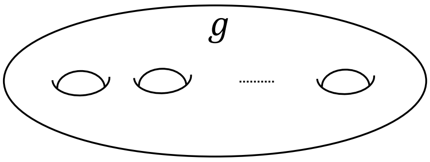


図 1: 種数 g の (3 次元) ハンドル体.

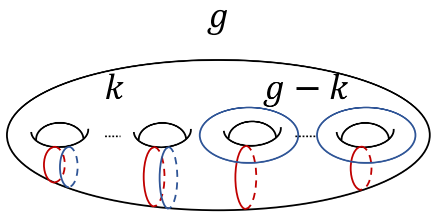


図 2: $\natural^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

本稿で紹介する trisection は，Heegaard 分解の 4 次元バージョンである．4 次元多様体の trisection とは，3 つの (4 次元)1-ハンドル体 ($\simeq \natural^k(S^1 \times D^3)$) による 4 次元多様体の分割であり，Gay-Kirby により導入された [3]．trisection は trisection 図式と呼ばれる曲面上の単純閉曲線の組で書き表すことができ，この表記は Heegaard 図式の類似となっている．また，閉 4 次元多様体から閉曲面への実可微分写像の特異点論とも関係している．実際，Gay-Kirby は論文 [3] において安定写像の変形を利用して，任意の閉 4 次元多様体が trisection を許容することを証明している．

現在，4 次元多様体の性質を trisection を用いて記述する研究や，主に 3 次元多様体の知識を用いて具体的に trisection を構成する研究，曲面結び目の新しい表示への応用等，様々な研究が行われている．本稿では，4 次元多様体から 2 次元多様体への可微分写像の研究の流れから生まれた単純 trisection を扱う．

2　trisection の定義

定義 1. $0 \leq k \leq g$ を正の整数とする．組 (X, X_1, X_2, X_3) が次の (1)，(2)，(3) を満たすとき，この組を (g, k)-trisection という．

(1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
(2) 各 $i = 1, 2, 3$ について，微分同相写像 $\phi_i : X_i \to \natural^k(S^1 \times D^3)$ が存在する．
(3) 各 $i = 1, 2, 3$ について，3 を法として，$Y^-_{k,g} = \phi_i(X_i \cap X_{i+1})$，$Y^+_{k,g} = \phi_i(X_i \cap X_{i-1})$ とおいたとき，$Y^+_{k,g} \cup Y^-_{k,g}$ は $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な Heegaard 分解を与える．

任意の有効連結閉 4 次元多様体は trisection を許容し，さらに各多様体に対しその trisection は "安定化" と呼ばれる操作の差を除いて一意的である [3]．3 次元多様体において，2-ハンドルの接着円周を種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上に表示したものを Heegaard 図式と呼んでいた．これと同様に，4 次元多様体に対しても，4 次元の 2-ハンドルの接着円周を曲面上に表示したものを考えることができる．これが次に述べる trisection 図式である．

定義 2. $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を，それぞれについて，Σ_g 上の非交和な単純閉曲線の族とする．各 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき，組 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ を trisection 図式という．

(g,k)-trisection(X, X_1, X_2, X_3) が与えられたとき，定義 1(3) の条件から，$\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の 3 つの Heegaard 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が定まる．これらを 1 つの曲面上に表示したものを $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ と書くと，これは trisection 図式となる．逆に，trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が与えられると， $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を接着円周とする 2-ハンドルを $\Sigma_g \times D^2$ の境界 $\Sigma_g \times \partial D^2$ の部分集合 $\Sigma_g \times \{1\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$ に，フレーミングを曲面から定めるフレーミングとして接着し，得られた $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ を k 個の 4 次元 3-ハンドルと 1 個の 4 次元 4-ハンドルで埋めることにより，X が一意に復元される．ここで得られる 4 次元多様体 X は，Laudenbach-Poenaru の定理 [6] により，k 個の 3-ハンドルと 1 個の 4-ハンドルの貼り合わせ方に依存しない．

3 折り目特異点・カスプ特異点・Lefschetz 特異点

以下，X を 4 次元多様体，$f : X \to \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし，$\mathrm{Crit(f)} = \{p \in X \mid p$ は f の臨界点 $\}$ とする．trisection 写像の定義を述べるために必要な特異点・及びその特異値集合の近傍における正則ファイバーの変化について紹介する．

定義 3. $p \in \mathrm{Crit(f)}$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp.$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき，$p$ は不定値 (resp. 定値) 折り目特異点である．

定義 4. $p \in \mathrm{Crit(f)}$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき，p はカスプ特異点である．

特異値の近傍の正則値上の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけることで，正則ファイバーのトポロジーは変化する．その様子を以下に示す．

図 3 中図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである．図 3 左図の縦方向の座標が定義 3 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 3 中図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため，点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．したがってファイバーの曲面では手術が行われ，図 3 中図のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 3 中図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び，値域上の点線を reference path と呼ぶ．定値折り目特異点の場合も同様にして，reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．また，このとき図 3 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって赤線を通過するとファイバーは空集合となり，図 3 右図のような変化が生じる．

カスプ特異点の近傍の像は図 3 右図である．黒太線部が特異値集合であり，特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している．図 3 右図の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ，ファイバーが D^2 へと変化する．このとき，a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる．

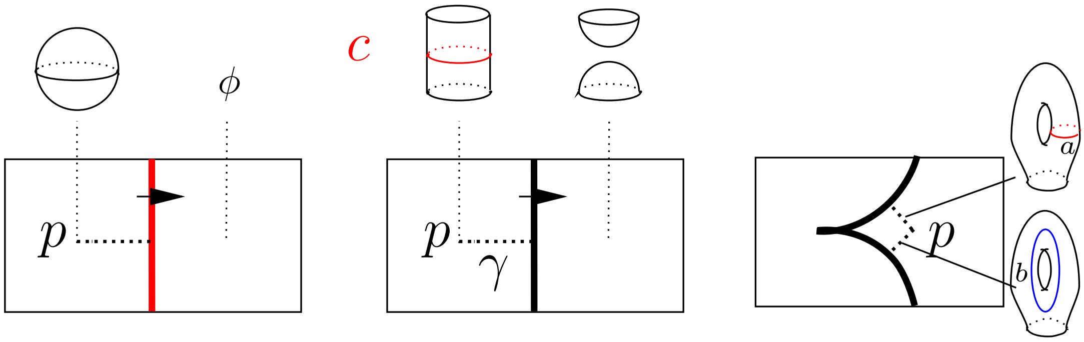


図 3: (左図)：定値折り目特異値　(中図)：不定値折り目特異値　(右図)：カスプ特異値

4　安定写像の定義

多様体の上の可微分写像及びその臨界点は，Morse 理論に代表されるように多様体の微分同相類の情報を持つ．Morse 関数の一般化である安定写像について，必要十分条件を紹介する．

定理 5. X を向き付け可能な閉 4 次元多様体，Σ を 2 次元多様体，$f : X \to \Sigma$ を可微分写像で固有 (proper) であるとする．f が安定であることと，次のすべての条件が成り立つことは同値である．

1 Crit(f) が折り目特異点とカスプ特異点からなる集合である．
2 f のカスプ特異点への制限は単射である．
3 f の折り目特異点への制限は，2 重点がすべて横断的で，その像はカスプ特異値を含まないはめ込みである．

また Crit(f) の重要な性質として，次が知られている．

定理 6. $\mathrm{Crit(f)} \subset X$ は 1 次元多様体である．

定理 4 により，特異値集合 $f(\mathrm{Crit(f)})$ ははめこまれたいくつかの円周からなることが分かる．trisection 写像は特異値集合にある条件を課したものである．

5　trisection 写像

Gay-Kirby は，閉 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ への安定写像 (trisection 写像) を構成することで，任意の閉 4 次元多様体が trisection を許容することを証明した．この節では，trisection 写像の定義について述べる．

定義 7. 安定写像 $f : X \to D^2$ の特異値集合が図 4 で与えられるとき，f は自然に (g, k)-trisection

の構造をもつ．また，このとき X は (g,k)-trisection 写像を許容するという．

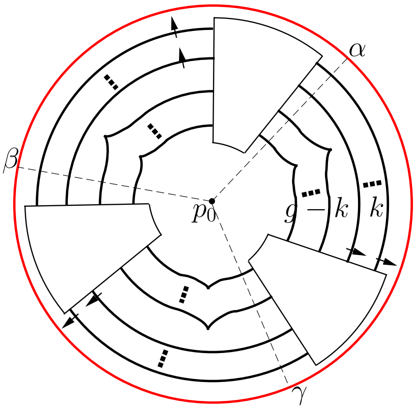


図 4: (g,k)-trisection 写像の特異値集合．

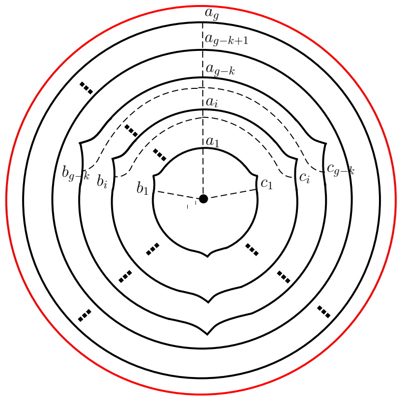


図 5: 単純な (g,k)-trisection 写像の特異値集合．

図 4 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．3 つの白い箱の内部はブレイドをなしていて，それぞれは g 本の不定値折り目特異値のなす曲線の像で結ばれている．ただし，これらの像は円板の半径と接する点を持たないとする．白い箱の間では，外側には不定値折り目特異値が k 本あり，内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g-k$ 本ある．

さらに，$f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．これは半径方向の reference path に沿って外から内に動いたときの正則ファイバーの変化を調べると，外側から順に，空集合，$S^2, T^2, \ldots, \Sigma_g$ と変化することから従う．

定義 7 における (g,k)-trisection 写像 f から X の (g,k)-trisection(X, X_1, X_2, X_3) と trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ を次のようにして得ることができる．まず，図 4 の reference path α, β, γ に沿って値域の D^2 を 3 つのセクターに分割する．各セクターの引き戻しは $\natural^k(S^1 \times D^3)$ と微分同相である．さらに，reference path α, β に沿って内側から外側にファイバーを動かすことで，不定値折り目特異点の消滅サイクルの族 $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$ を得る．これらは定義から Σ_g 上の cut system であり，$f^{-1}(\alpha \cup \beta) \simeq \sharp^k(S^1 \times S^2)$ であることから $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ は $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．reference path β, γ，γ, α についても同様に $(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．以上から，trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が f より得られる．またこれらのことから各セクターの共通部分が定義 1(3) を満たすこともしたがう．逆に，定義 1 から図 4 を特異値集合とする安定写像を構成することもできる [3]．trisection 写像をより単純化したものとして，Baykur-Saeki は特異値が図 5 で与えられる単純な trisection 写像という概念を導入し，任意の閉 4 次元多様体が単純な trisection 写像をもつことを証明した [1]．この証明には 4 次元多様体から閉曲面への安定写像の理論，及び Lefschetz 束の理論を用いている．また，Hayano は単純な trisection 写像に付随する trisection 図式の研究を閉曲面の写像類群の観点から進め，モノドロミーの表記などを精密化した [4]．

6　単純な trisection のモノドロミー

Baykur-Saeki は base diagram move という変形を閉 4 次元多様体がもつ単純特異 Lefschetz 束に対して適応することで，次を示した．

定理 8 (Baykur-Saeki [1])**.** Z_f を f の Lefschetz 特異点の集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) 閉 4 次元多様体 X に対し，$f : X \to S^2$ を，$\#Z_f = k$ かつ C_f の連結成分数は $l \in \{0, 1\}$ である単純特異 Lefschetz 束とする．このとき，X は単純な $(2g + k - l + 2, 2g - l)$-trisection を許容する．

(2) X が単純な (g, k)-trisection を持つとする．このとき，ファイバー連結である directed 特異 Lefschetz 束で種数が $g + 2$，かつ，$\sharp Z_f = 3g - 3k + 4$ であるものが存在する．

trisection 写像から 4 次元多様体の図式を得るためには，不定値折り目特異点の消滅サイクルを決定する必要がある．一方単純な trisection 写像は，消滅サイクルらに Lefschetz 特異点のモノドロミーに由来する関係式がある．Hayano は次の定理を示した．定理において，$\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}$ は中心にある正則ファイバーに対し，消滅サイクル $a_1, \ldots, a_{i-1}$ に沿って曲面を切り開き，各境界成分に円板を貼ることで得られる曲面を表し，$\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ はその曲面上の曲線 a_i を固定する自己微分同相写像のなす群を表す．また，Φ_{a_i} は $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ から $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1},a_i})$ への，a_i に沿った変形により定まる自然な写像とする．

定理 9 (Hayano [4])**.** $f : X \to \mathbf{R}^2$ を単純 (g, k)-trisection とし，図 5 のように reference path を与える．$a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_{g-k}, c_1, \ldots, c_{g-k}$ を中心にある正則ファイバー上の消滅サイクルとする．このとき，次が成り立つ．

(1) 各 $i = 0, \ldots, g - k - 1$ に対し，$\mu_i \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ を帰納的に

$$\mu_i = \begin{cases} id_\Sigma & i = 0 \\ \Phi_{a_i}(t_{t_{c_i}(a_i)} \circ \mu_{i-1} \circ t_{t_{b_i}(c'_i)} \circ t_{t_{a_i}(b_i)}) & i > 0 \end{cases}$$

で定義する．ただし $c'_{i+1} = \mu^{-1}(c_{i+1})$ である．このとき，μ_i は特異値集合の内側から図 6 のように i 番目の円の少し内側にそれと平行に描いた円に沿ったモノドロミーを表す．

(2) $(a_i, b_i), (a_i, c_i)$ (b_i, c'_{i+1}) はそれぞれただ一度だけ交わる．

(3) 各 $j = g - k, \ldots, g - 1$ について，$\Phi_{a_j} \circ \cdots \circ \Phi_{a_{g-k+1}}(\mu_{g-k})$ は a_{j+1} を保つ．

逆に，これらの条件を満たす $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_{g-k}, c_1, \ldots, c_{g-k}$ が与えられたとき，それを実現する単純な trisection $f' : X' \to \mathbf{R}^2$ が存在する．

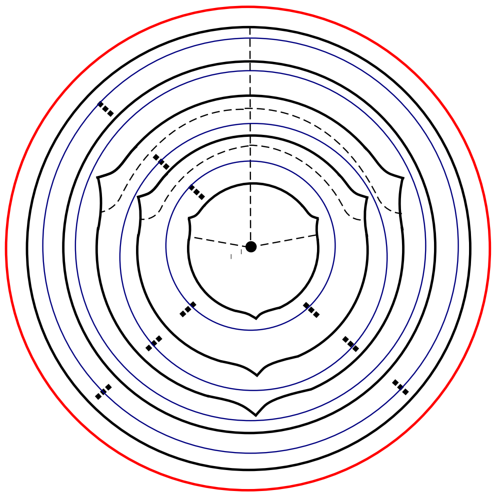
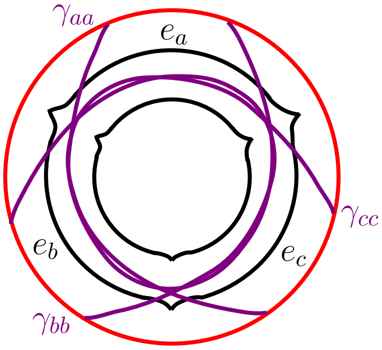


図 6: μ_i を誘導する円周の族.

また，Hayano は論文 [4] において，定理 9 のモノドロミーの表記と安定写像のホモトピー変形を用いることで，種数 2 の単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類を行った．この結果は Meier-Zupan による種数 2 の trisection を許容する 4 次元多様体の分類の系としてすでに知られていたが，論文 [4] では単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類問題を線形代数の問題に帰着させることで，より簡明な証明を与えている．

7　主結果

講演者は，単純な $(2,0)$-trisection をより詳細に把握するために，trisection 写像の像に適切 (proper) に埋め込まれた弧の引き戻しとして定まる 3 次元多様体の研究を行った．以下，定理を述べるための記号を準備する．単純な $(2,0)$-trisection の特異値集合における外側のカスプ付き円周の各辺を e_a, e_b, e_c とし，γ_{aa} を $f(X) \simeq D^2$ に適切に埋め込まれた弧で，e_a において 2 点で交わり，内側のカスプ付き円周と $e_b \cup e_c$ を分離するものとする．γ_{bb}, γ_{cc} も同様に定める．γ_{ab} を $f(X) \simeq D^2$ に適切に埋め込まれた弧で，e_a, e_b とそれぞれ 1 度ずつ交わり，e_c と内側のカスプ付き円周を分離するものとする．γ_{bc}, γ_{ca} も同様にして定める．$i, j \in \{a, b, c\}$ に対し，$V_{ij} = f^{-1}(\gamma_{ij})$ とする．$f|_{V_{ij}}$ は Morse 関数であり，これは V_{ij} の種数 1 の Heegaard 分解を与える．よって V_{ij} は $S^3, S^1 \times S^2$ またはレンズ空間である．



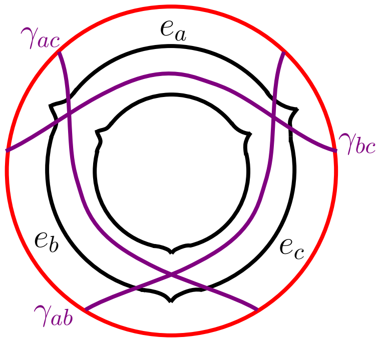


図 7: 単純な (2,0)-trisection 写像の特異値集合と γ_{ij}.

Hayano の単純な $(2,0)-$trisection の分類に用いられた手法により，6 つ組 $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ab} & V_{bc} & V_{ca} \end{pmatrix}$ の分類を行った．以下，3 次元多様体の向きは考慮しないものとする．分類から特に，以下のことが成り立つ．

定理 10. (1) V_{aa} は S^3 または $L(n^2, n \pm 1)$ である．

(2)V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} は $(n,1)$ 型のレンズ空間である．

また，定理より次が従う．

系 11. $f : X \to \mathbf{R}^2$ を単純な (2,0)-trisection，$\gamma \subset f(X)$ を適切に埋め込まれた，折り目特異値との接点及びカスプ特異値との交点を持たない弧とする．このとき，$f^{-1}(\gamma)$ は $S^3, S^1 \times S^2, (n,1)$ 型及び $(n^2, n \pm 1)$ 型のレンズ空間の有限個の連結和である．

6 つ組のリストから，単純な trisection を構成し，定義域の 4 次元多様体の判定が可能である．このことや，現れる 3 次元多様体のリスト・用いられるホモトピー変形について，時間が許せば講演にて紹介する．

参考文献

[1] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds, preprint, available at arXiv:1705.11169.

[2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds, *PNAS*, **115** (2018）, no. 43, 10894–10900.

[3] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[4] K. Hayano, On diagrams of simplified trisections and mapping class groups, available at arXiv:1711.02790, to appear in Osaka J. Math.

[5] M. Kobayashi, On the cusped fan in a planar portrait of a manifold, *Geom. Dedicata*, **162** (2013), 25–43.

[6] F. Laudenbach and V. Poénaru，A note on 4-dimensional handlebodies, *Bull. Soc. Math. France*, **100** (1972), 337–344.