The KPZ fixed point for discrete time TASEP

千葉大学大学院 融合理工学府 数学情報科学専攻
新井裕太 (Yuta ARAI)

1　導入

1 次元非対称排他過程 (ASEP) は 1 次元格子上を多数の粒子が非対称なランダムウォークをする相互作用粒子系である．特に粒子が一方向にしかジャンプしないものを TASEP と呼ぶ．TASEP の研究において, 粒子の位置に関する分布 (または粒子の位置を表す確率変数から定義できる高さ関数の分布) の極限分布に現れる普遍性 (KPZ 固定点) に関する研究が 2000 年頃から盛んに行われている．代表的な先行研究として, 2000 年の Johanson[15] の step 初期条件下における 1 点の分布の極限分布に関する結果や 2005 年の Sasamoto[22] の periodic 初期条件下における多点の分布の極限分布に関する結果などが挙げられる．上記に挙げた結果は特別な初期条件下における結果であるが, 近年, Matetski, Quastel, Remenik[14] によって拡張が行われ, 連続時間 TASEP の場合に任意の特定の初期条件下における多点の分布の極限分布に関する結果が出されている．本稿では, Matetski, Quastel, Remenik[14] の手法を用いることによって, 離散時間 TASEP の場合に任意の特定の初期条件下において, 多点の分布の極限分布に関する結果が得られたことを紹介する．

2　準備

2.1　記号

$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ とし, $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ とする．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．$t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ において, $X_t(i)$ を時刻 t における i 番目の粒子の位置とする．$\widehat{g} : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$, $\widehat{h} : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ とするとき, $\mathrm{hypo}(\widehat{h}) = \{(x, y) : y \leq \widehat{h}(x)\}$, $\mathrm{epi}(\widehat{g}) = \{(x, y) : y \geq \widehat{g}(x)\}$ とする．RW_m を $\mathrm{Geom}[\frac{1}{2}]$ で左にジャンプするランダムウォークとし, $\tau = \min\{m \geq 0 : RW_m > X_0(m+1)\}$ を停止時刻とする．

2.2　離散時間 TASEP

本稿では, $\mathbb{Z}$ 上で, sequential に時間発展する離散時間 Bernoulli TASEP を考える．任意の時刻 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ において, 各サイトには 1 つの粒子しか存在できないものとする．$\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ を粒

子の配置とする．そのとき, TASEP はマルコフ過程で,

$$\eta_x = \begin{cases} 1 & (\text{粒子がサイト } x \text{ に存在する}), \\ 0 & (\text{粒子がサイト } x \text{ に存在しない}) \end{cases}$$

である．

時刻 $t+1$ において, 系は時刻 t の状態から以下のような sequential update ルールによって確率的に発展する:

最初に $X_{t+1}(1)$ を

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(1) = X_t(1) + a) = \begin{cases} 1-p & \text{for } a = 0, \\ p & \text{for } a = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって, アップデートする．そのとき, $i = 2, \ldots, N$ までをこの順番で, $X_{t+1}(i) - X_t(i) = 1$ であるときに

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(i) = X_t(i) + a) = \begin{cases} 1-p & \text{for } a = 0, \\ p & \text{for } a = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とアップデートし, $X_{t+1}(i) - X_t(i) = 0$ であるときに

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(i) = X_t(i) + a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とアップデートする．このアップデートは独立に行われており, この TASEP のダイナミクスは粒子のオーダーを保つ．

時刻 $t \geq 0$ において, 粒子の位置を

$$\cdots < X_t(2) < X_t(1) < X_t(0) < X_t(-1) < X_t(-2) < \cdots$$

で表すこととし, 状態空間に $\pm\infty$ を加えたときは, $\pm\infty$ にある粒子はダイナミクスに関与しないものとする．

ここで, TASEP の高さ関数を導入する．$X_t^{-1}(u) = \min\{k \in \mathbb{Z} : X_t(k) \leq u\}$ とすると, $z \in \mathbb{Z}$ において, TASEP の高さ関数は

$$h_t(z) = -2(X_t^{-1}(z-1) - X_0^{-1}(-1)) - z$$

で与えられる．

この節で紹介した sequential に時間発展する Bernoulli TASEP は [2] にて, 以前から研究されているモデルである．

3 主結果

まず最初に, 離散時間 TASEP の粒子の位置に関する分布が以下のようにフレドホルム行列式の形で与えられるということを紹介する.

Theorem 1. (Discrete time TASEP formula for right-finite initial data).
$j \leq 0$ で $X_0(j) = \infty$ であると仮定する. そのとき, $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_M$ と $t > 0$ において,

$$\mathbb{P}(X_t(n_j) > a_j, j = 1, \ldots, M) = \det(I - \overline{\chi}_a K_t \overline{\chi}_a)_{\ell^2(\{n_1,\ldots,n_M\}\times\mathbb{Z})}$$

となる. ただし, $\overline{\chi}_a(n_j, x) := \mathbf{1}_{x \leq a_j}$ で, カーネル K_t は

$$K_t(n_i, \cdot; n_j, \cdot) = -Q^{n_j - n_i}\mathbf{1}_{n_i < n_j} + (S_{-t,-n_i})^* \overline{S}^{\mathrm{epi(X_0)}}_{-t,n_j}$$

である. また, 上記のカーネルに出てくる関数は

$$Q^m(x, y) = \frac{1}{2^{x-y}}\binom{x-y-1}{m-1}\mathbf{1}_{x \geq y+m},$$

$$S_{-t,-n}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^n}{2^{z_2 - z_1} w^{n+1+z_2-z_1}}\left\{1 + \frac{2p}{2-p}(w - \frac{1}{2})\right\}^t,$$

$$\overline{S}_{-t,n}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} dw \frac{(1-w)^{z_2 - z_1 + n - 1}}{2^{z_1 - z_2} w^n}\left\{1 - \frac{2p}{2-p}(w - \frac{1}{2})\right\}^{-t},$$

$$\overline{S}^{\mathrm{epi(X_0)}}_{-t,n}(z_1, z_2) = \mathbb{E}_{RW_0 = z_1}\left[\overline{S}_{-t,n-\tau}(RW_\tau, z_2)\mathbf{1}_{\tau < n}\right].$$

であり, Γ_0 は 0 周りを反時計回りに回るループで 1 と $\frac{1}{p}$ と $\frac{1-p}{p}$ を含まない.

次に, 高さ関数の KPZ 1:2:3 scaling limit と呼ばれているものを考える:

$$\widehat{h}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}),\ \text{ただし}\ \widehat{h}^\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[h_{\frac{2-p}{p}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}}(2\varepsilon^{-1}\mathbf{x}) + \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t}\right].$$

UC トポロジーにおいて, 分布の意味で $\widehat{h}_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{h}^\varepsilon(0, \cdot)$ が成り立つように ε に依存する初期データ X_0^ε を取る. また, $X_0^{-1}(-1) = 1$ であるとする. そのとき, UC において, 分布の意味で

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}(X_0^\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + 2\varepsilon^{-1}x - 1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -\widehat{h}_0(-x) \tag{1}$$

が成り立つ.

ここで, $\mathbf{t} > 0$ を固定すると以下が得られる. これは [12] の離散時間バージョンである.

Theorem 2. (Pointwise convergence). スケーリングの元で LC において (1) が成り立つとし, $z = \frac{p(2-p)}{4(1-p)}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathbf{t} + 2\varepsilon^{-1}\mathbf{x} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(u + \mathbf{a}) - 2$, $y' = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}v$ とする. そのとき, $\mathbf{t} > 0$ において, $\varepsilon \to 0$ とすると, pointwise の意味で

$$\mathbf{S}^\varepsilon_{-t,x}(v, u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}S_{-t,-n}(y', z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},\mathbf{x}}(v, u)$$

$$\overline{\mathbf{S}}^{\varepsilon}_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\overline{S}_{-t,n}(y', z) \to \mathbf{S}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u)$$

$$\overline{\mathbf{S}}^{\varepsilon,\mathrm{epi}(-h_0^{\varepsilon,-})}_{-t,-x}(v,u) := \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\overline{S}^{\mathrm{epi}(X_0)}_{-t,n}(y', z) \to \mathbf{S}^{\mathrm{epi}(-\widehat{h}_0^{-})}_{-\mathbf{t},-\mathbf{x}}(v,u)$$

が成り立つ. ただし, $x \geq 0$ において, $\widehat{h}_0^{-}(x) = \widehat{h}_0(-x)$ で,

$$\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v-u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\langle} dw\, e^{\frac{\mathbf{t}}{3}w^3 + xw^2 - (v-u)w} = \mathbf{t}^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{2\mathbf{x}^3}{3\mathbf{t}^2} - \frac{(v-u)\mathbf{x}}{\mathbf{t}}}\mathrm{Ai}(-\mathbf{t}^{-\frac{1}{3}}(v-u) + \mathbf{t}^{-\frac{4}{3}}\mathbf{x}^2),$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{epi}(\widehat{g})}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}}(B(\boldsymbol{\tau}),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}<\infty}] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}_{B(0)=v}(\boldsymbol{\tau} \in d\mathbf{s})\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\mathbf{s}}(B(\boldsymbol{\tau}),u)$$

であるとする.

ここで, $\langle$ は 0 を通り $e^{-\frac{i\pi}{3}}\infty$ から $e^{\frac{i\pi}{3}}\infty$ へ向かう向き付けられたコントゥーアで Ai は Airy 関数で $\mathrm{Ai}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\langle} dw\, e^{\frac{1}{3}w^3 - zw}$ と表されるものである. また, $B(x)$ は拡散係数 2 のブラウン運動で $\boldsymbol{\tau}$ は関数 $\widehat{g}$ のエピグラフへの到達時刻である.

次に上記の Pointwise convergence を使うことで以下の結果が得られる.

Theorem 3. (One-sided fixed point formula). $\widehat{h}_0 \in \mathrm{UC}$ とし, $\mathbf{x} > 0$ で $\widehat{h}_0(\mathbf{x}) = -\infty$ であるとする. そのとき, $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \cdots < \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_{\widehat{h}_0^{\varepsilon}}(\widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{a}_1, \ldots, \widehat{h}^{\varepsilon}(\mathbf{t},\mathbf{x}_m) \leq \mathbf{a}_m) = \det\left(\mathbf{I} - \chi_{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}\chi_{\mathbf{a}}\right)_{L^2(\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}\times\mathbb{R})}$$

が得られる. ただし, カーネルは

$$\mathbf{K}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0)}_{\mathbf{t},\mathrm{ext}}(\mathbf{x}_i, v; \mathbf{x}_j, u) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi(x_j - x_i)}}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4(x_j - x_i)}\right)\mathbf{1}_{\mathbf{x}_i<\mathbf{x}_j} + \left(\mathbf{S}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h}_0^{-})}_{\mathbf{t},-\mathbf{x}_i}\right)^{*}\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}_j}(v,u),$$

で, カーネルに含まれる関数は

$$\mathbf{S}^{\mathrm{hypo}(\widehat{h})}_{\mathbf{t},\mathbf{x}}(v,u) = \mathbb{E}_{B(0)=v}[\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\boldsymbol{\tau}'}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{\tau}<\infty}] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}_{B(0)=v}(\boldsymbol{\tau}' \in d\mathbf{s})\mathbf{S}_{\mathbf{t},\mathbf{x}-\mathbf{s}}(B(\boldsymbol{\tau}'),u)$$

である. また, $B(x)$ は拡散係数 2 のブラウン運動で $\boldsymbol{\tau}'$ は関数 $\widehat{h}$ のハイポグラフへの到達時刻である.

参考文献

[1] Alexei Borodin, Ivan Corwin,
"Discrete Time q-TASEPs," International Mathematics Research Notices 2015, 499-537, (2015).

[2] Alexei Borodin, Patrik L. Ferrari,
"Anisotropic Growth of Random Surfaces in $2+1$ Dimensions", Communications in Mathematical Physics, 325, 603-684, (2014).

[3] Alexei Borodin, Patrik L.Ferrari, Michael Präohofer,
" Fluctuation in the discrete TASEP with periodic initial configurations and the Airy_1 process", International Mathematics Research Papers, 2007, 1-47, (2007).

[4] Alexei Borodin, Patrik L.Ferrari, Michael Präohofer, Tomohiro Sasamoto,
" Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration", Journal of Statistical Physics, 129, 1055-1080, (2007).

[5] Alexei Borodin, Patrik L. Ferrari, Tomohiro Sasamoto,
" Large time asymptotics of growth models on space-like paths II: PNG and parallel TASEP", Communications in Mathematical Physics, 283, 417-449, (2008).

[6] Attila R*á*kos, Gunter M. Schütz,
" Current distribution and random matrix ensembles for an integrable asymmetric fragmentation process", Journal of Statistical Physics, 118, 511-530, (2005).

[7] Barry Simon,
" Trace ideals and their applications" Mathematical Surveys and Monographs, (2005).

[8] Frank Spitzer,
" Interaction of Markov processes " , Advances in Mathematics, 5, 246-290, (1970).

[9] Fraydoum Rezakhanlou,
" Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbb{Z}^d$", Communications in Mathematical Physics 140, 417-448, (1991).

[10] Gunter M. Schütz,
" Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process", Journal of Statistical Physics, 88, 427-445, (1997).

[11] Jeremy Quastel, Daniel Remenik,
" Airy processes and variational problems", Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, (2014).

[12] Jeremy Quastel, Konstantin Matetski
" From the totally asymmetric simple exclusion process to the KPZ fixed point" arXiv:1710.02635,(2017).

[13] Jinho Baik, Eric M. Rains,
" Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources", Journal of Statistical Physics, 100, 523-541, (2000).

[14] Konstantin Matetski, Jeremy Quastel, Daniel Remenik
" The KPZ fixed point" arXiv:1701.00018, (2018).

[15] Kurt Johansson,
" Shape fluctuations and random matrices", Communications in Mathematical Physics, 209, 437-476, (2000).

[16] Kurt Johansson,
" Discrete polynuclear growth and determinantal processes", Communications in Mathematical Physics, 242, 277-329, (2003).

[17] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, Yi-Cheng Zhang,
" Dynamic scaling of growing interfaces", Phys. Rev. Lett, 56, 889-892,(1986).

[18] Michael Präohofer, Herbert Spohn,
"Universal distributions for growth processes in $1+1$ dimensions and random matrices", Phys. Rev. Lett. 84, 4882-5,(2000).

[19] Patrick Billingsley,
"convergence of probability measures", Wiley Series in Probability and Statistics, (1999).

[20] Patrik L. Ferrari,
" Dimers and orthogonal polynomials: connections with random matrices", arXiv: 1004.3212v2 (2013).

[21] Takashi Imamura, Tomohiro Sasamoto,
" Dynamics of a tagged particle in the asymmetric exclusion process with the step initial condition" Journal of Statical Physics, 128, 799-846, (2007).

[22] Tomohiro Sasamoto,
" Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate", Journal of Physics A: Mathematical and General, 38, 549-556 (2005).