cscK 計量に付随する完備スカラー平坦 Kähler 計量の存在について

青井顕宏 Takahiro Aoi*
大阪大学大学院理学研究科数学専攻

概要

本稿では、ある偏極多様体がそのスカラー曲率が正定数となる Kähler 計量をもつような滑らかな超曲面を持つとき、その超曲面の補集合上には完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する、という結果について紹介する.

1　はじめに

Kähler 多様体上には一般に多くの Kähler 計量が存在するが、その中でも標準的なものとして、そのスカラー曲率が定数となるような Kähler 計量の存在を考えることは重要である. 例えばユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ や閉 Riemann 面、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ などは Kähler 多様体であって、特に Kähler Einstein 計量を持つのでスカラー曲率が定数となるような Kähler 計量を持つ. 一方で、2 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^2$ を 1 点もしくは 2 点でブローアップした Del Pezzo 曲面と呼ばれる Kähler 多様体は、スカラー曲率が定数となるような Kähler 計量を持たないし、特に Kähler Einstein 計量も持たない (ちなみに、$\mathbb{CP}^2$ を 3 点でブローアップした Del Pezzo 曲面は Kähler Einstein 計量を持つ). このような例もあって、Kähler 多様体上でスカラー曲率が定数となる Kähler 計量の存在を考えることは面白い問題であり、それは 4 階の非線形偏微分方程式を複素多様体上で解くことに帰着される. ここではコンパクトでない Kähler 多様体上のスカラー曲率が定数となるような Kähler 計量の構成を考えるが、その存在について肯定的な結果が得られたので、それについて紹介する.

2　Kähler 計量とスカラー曲率

定義 1 (Kähler 計量)**.** X を n 次元複素多様体とする. X 上の実 (1,1)-形式 ω で次の条件を満たすものが存在するとき、(X, ω) が Kähler 多様体であるといい、ω を Kähler 計量と呼ぶ.

- $d\omega = 0$.
- X の任意の正則局所座標 $(z^1, ..., z^n)$ に対して $\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i,\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ と書いたときに、$(g_{i,\bar{j}})_{i,j}$ は正定値 Hermite 行列である.

* t-aoi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

Kähler 計量 ω に対して、リッチ形式とスカラー曲率は次で定義することができる.

定義 2 (リッチ形式)**.** (X,ω) を Kähler 多様体とする. このとき、ω のリッチ形式を次で定める,

$$\mathrm{Ric}(\omega)=\sqrt{-1}\sum_{i,j}R_{i,\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j:=-\sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\log\det(g_{\alpha,\bar{\beta}})_{\alpha,\beta}}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}dz^i\wedge d\bar{z}^j\in C^\infty_{(1,1)}(X).$$

注意 3. $(2\pi)^{-1}\mathrm{Ric}(\omega)$ は、X の第一 Chern 類 $c_1(X)=c_1(K_X^{-1})$ を代表する実 2 形式である.

定義 4 (スカラー曲率)**.** (X,ω) を Kähler 多様体とする. このとき、ω のスカラー曲率を次で定める,

$$S(\omega):=\mathrm{tr}_\omega\mathrm{Ric}(\omega)=\sum_{i,j}g^{i,\bar{j}}R_{i,\bar{j}}\in C^\infty(X,\mathbb{R}).$$

定義 5 (Kähler Einstein 計量)**.** 次のような $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在するとき、ω を Kähler Einstein 計量であるという.

$$\mathrm{Ric}(\omega)=\lambda\omega.$$

特に $\lambda=0$ のとき、ω をリッチ平坦 Kähler 計量であるという.

本稿での主題は、次で定義する計量の存在問題である.

定義 6 (cscK 計量)**.** スカラー曲率 $S(\omega)$ が定数であるとき、ω を cscK 計量であるという. 特に $S(\omega)$ が 0 であるとき、ω をスカラー平坦 Kähler 計量であるという

注意 7. cscK 計量とは、constant scalar curvature Kähler 計量 (スカラー曲率一定の Kähler 計量) の略である.

Kähler 計量 ω と滑らかな関数 ϕ に対して $\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ がまた正定値であれば、これもまた Kähler 計量になる. 従って、我々が解きたいのは次の非線形偏微分方程式である.

$$S(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)=\mathrm{const}.$$

3 背景と問題

ここでは Kähler 多様体の中でも特別な、偏極多様体 (射影的なもの) を扱う.

定義 8 (偏極多様体)**.** コンパクトな複素多様体 X とその上の豊富な直線束 L との組 (X,L) を偏極多様体という.

小平の埋込定理により、直線束が豊富であることは、L 上の Hermite 計量でその曲率を $\sqrt{-1}$ 倍したものが正定値となるものが存在する、という微分幾何学的な条件へ言い換えることができる. 問題に入る前に、コンパクトでない複素多様体上のリッチ平坦 Kähler 計量とスカラー平坦 Kähler 計量に関して得られている結果について振り返ろう. 多様体がコンパクトでなく、特に Kähler Einstein 計量について考えた場合、次に述べるような肯定的な結果がいくつか得られている.

定理 9 (Calabi [4])**.** X を Fano 多様体とする．このとき、X が Kähler Einstein 計量を持てば、標準直線束 K_X の全空間上にはリッチ平坦となるような完備 Kähler 計量が存在する．

ここで X が Fano 多様体であるとは、その反標準直線束 $K_X^{-1} = \bigwedge^n TX$ が豊富であるときをいう．また計量が完備であるとは、その計量から定まる距離に関して完備であるときをいう．この定理は、直線束のファイバー方向の 2 階の常微分方程式を解くことで得られるので比較的易しい．そして、この結果の一般化として、次のようなものがある．

定理 10 (Bando-Kobayashi [3])**.** X を $n(\geq 2)$ 次元 Fano 多様体とし、滑らかな超曲面 D である $\alpha > 1$ に対し $c_1(X) = \alpha[D]$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき、D が Kähler Einstein 計量を持てば、$X \setminus D$ 上に完備リッチ平坦 Kähler 計量が存在する．

ここで $[D]$ は D のポアンカレ双対である．この場合は超曲面 D が Kähler Einstein 計量を持つことがポイントになっているわけだが、さらに

定理 11 (Tian-Yau [7])**.** X を $n(\geq 2)$ 次元 Fano 多様体とし、滑らかな超曲面 D で $K_X + D = 0$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき、$X \setminus D$ 上に完備リッチ平坦 Kähler 計量が存在する．

仮定 $K_X + D = 0$ によって D は Calabi-Yau 多様体であるので、Yau の結果 [8] により D は特にリッチ平坦 Kähler 計量を持つ．これらの一般化では、常微分方程式ではなく 2 階の非線形偏微分方程式である複素 Monge-Ampère 方程式を解くことで完備リッチ平坦 Kähler 計量を構成している．前に述べた Calabi による定理の仮定を射影束 $\mathbb{P}(K_X)$ の無限遠 X が Kähler Einstein 計量を持つと解釈することで、これら三つの結果から、ある部分多様体が Kähler Einstein 計量を持てば、その補集合はリッチ平坦 Kähler 計量をもつことが分かるのだが、これらのスカラー曲率版を考えることがここでの目的である．そのために、偏極多様体 (X, L) に対し、スカラー曲率の平均をとった値を考える．

$$\hat{S}_X := \frac{nc_1(K_X^{-1}) \cup c_1(L)^{n-1}}{c_1(L)^n}.$$

この値については後でもう少しだけ正確に書く．さて、上記の Calabi による結果 [4] の結果に対する Bando-Kobayashi[3] や Tian-Yau[7] による一般化に対し、次のような異なる方向への一般化が既に得られている．

定理 12 (Hwang-Singer [5])**.** (X, L) を偏極多様体とする．このとき、L の Hermite 計量から定まる cscK 計量で $\hat{S}_X \geq 0$ となるものが存在すれば、双対直線束 L^{-1} の全空間上に完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する．

これは $K_X = (K_X^{-1})^{-1}$ と見做すことによって Calabi による結果 [4] のスカラー曲率版と考えることができるし、この定理も常微分方程式を解くことで得られる．そして、リッチ形式を考えたときの Bando-Kobayashi[3] や Tian-Yau[7] のような Calabi の結果 [4] の一般化に対応する、スカラー曲率における Hwang-Singer[5] の結果の一般化として、次の問題が自然に現れる．

問題 1. (X, L_X) を n 次元偏極多様体とし、滑らかな超曲面 $D \in |L_X|$ が存在すると仮定する．このとき、$(D, L_X|_D)$ が cscK 計量をもてば、$X \setminus D$ 上に完備スカラー平坦 Kähler 計量は存在するのか？

ここで $D \in |L_X|$ とは、ある大域正則切断 $\sigma_D \in H^0(X, L_X)$ が存在して、その σ_D から定まる因子が D である、という意味である．この問題は複素 Monge-Ampère 方程式ではなく、先に述べた 4 階の非線形偏微分方程式

$$S(\omega + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi) = 0$$

を解くことを考えなくてはならない．D が cscK 計量を持つというのは、[3] や [7] において D が Kähler Einstein 計量を持つということのスカラー曲率版を考えることで自然に生じる仮定である．次の章では超曲面 D が cscK 計量を持つことを仮定することで、この方程式を直接解くことを考える．

4 結果

設定は以下の通りである．(X, L_X) を n 次元偏極多様体とする．小平の埋込定理により、L_X 上の Hermite 計量 h_X で、その曲率形式を $\sqrt{-1}$ 倍したものが正定値となるものが存在する．このようにして h_X によって定められる Kähler 計量を θ_X とかく．滑らかな超曲面 D で $D \in |L_X|$ を満たすものが存在すると仮定する．L_D を L_X の D への制限とし、h_D を h_X の L_D への制限とする．このとき、h_D によって定義される D 上の Kähler 計量を θ_D とかく．θ_D のスカラー曲率 $S(\theta_D)$ の D 上の平均を $\hat{S}_D$ と書き、それはコホモロジー類を用いて次のように書ける．

$$\hat{S}_D := \frac{\displaystyle\int_D S(\theta_D)\theta_D^{n-1}}{\displaystyle\int_D \theta_D^{n-1}} = \frac{(n-1)c_1(K_D^{-1}) \cup c_1(L_D)^{n-2}}{c_1(L_D)^{n-1}}.$$

ここでは $\hat{S}_D > 0$ の場合を扱う．$\sigma_D \in H^0(X, L_X)$ を超曲面 D を定める大域正則切断とし、$t := \log ||\sigma_D||_{h_X}^{-2}$ とおく．$X \setminus D$ 上の完備 Kähler 計量を次で定義する．

$$\omega_0 := \frac{n(n-1)}{\hat{S}_D}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\exp\left(\frac{\hat{S}_D}{n(n-1)}t\right).$$

さて、Kähler 多様体 $(X \setminus D, \omega_0)$ は [3] により漸近錐的幾何である．

定義 13. (M, g) をコンパクトでない m 次元完備リーマン多様体とする．r を適当な点 $o \in M$ からの距離関数とする．任意の点 $p \in M$ に対し、次を満たす p を中心とする調和座標 $x = (x^1, ..., x^m)$ が存在するとき、(M, g) は $C^{k,\alpha}$ 漸近錐的幾何であるという．

- x は単位球 $B_p^m \subset \mathbb{R}^m$ 上で定義される．
- 上の座標で $g = \sum_{i,j} g_{i,j}(x)dx^i dx^j$ と書いたときに、p に依らないある正定値行列 A に対して $(r(p)^2+1)^{-1}(g_{i,j})_{i,j} \geq A$ が成り立つ．
- $(r(p)^2+1)^{-1}g_{i,j}$ の $C^{k,\alpha}$ ノルムは p に依らず一様に有界である．

漸近錐的幾何である完備リーマン多様体 M に対して、次のような重み付き関数空間を定義することができる [3].

定義 14. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha \in (0,1), \delta \in \mathbb{R}$ に対し、次で定義されるノルムが有限であるとき、M 上の関数 u が重み付き関数空間 $C^{k,\alpha}_\delta = C^{k,\alpha}_\delta(M)$ の元であるという.

$$||u||_{C^{k,\alpha}_\delta} := \sup_{p \in M} ||u||_{C^{k,\alpha}(B_p)}(r(p)^2+1)^{\delta/2}.$$

ここで B_p とは上の漸近錐的幾何の定義に現れる p の周りの調和座標である.

任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha \in (0,1), \delta \in \mathbb{R}$ に対し、重み付き関数空間 $C^{k,\alpha}_\delta = C^{k,\alpha}_\delta(M)$ は Banach 空間である. 以上より、適当に固定された点 $x_0 \in X \setminus D$ からの距離関数 $r(x) := d_{\omega_0}(x, x_0)$ に対して重み付き関数空間 $C^{k,\alpha}_\delta = C^{k,\alpha}_\delta(X \setminus D)$ を定義することができる.

リッチ形式を具体的に計算することで $r \to \infty$ としたときに $S(\omega_0) = O(r^{-2})$ となることは簡単に示すことができるが、さらに θ_D を cscK と仮定することで、次のより強い結果を得る.

定理 15 (A.)**.** θ_D が D 上の cscK 計量であるならば、次の評価を得る:

$$S(\omega_0) = O(r^{-2-2\hat{S}_D/n(n-1)}), \quad (r \to \infty).$$

この定理により、スカラー曲率 $S(\omega_0)$ は 2 よりも大きい重み δ 付きの関数空間 $C^{k,\alpha}_\delta$ に入っていることが分かる. 方程式 $S(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi) = 0$ を解くために、Arezzo-Pacard[1],[2] に従い、重み $\delta > 4$ と関数 $\phi \in C^{4,\alpha}_{\delta-4}$ に対し、つぎの展開を考える.

$$S(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi) = S(\omega_0) + L_{\omega_0}(\phi) + Q_{\omega_0}(\phi).$$

ここで $L_{\omega_0} : C^{4,\alpha}_{\delta-4} \to C^{0,\alpha}_\delta$ はスカラー曲率を線形化したものであり、次の関係式を満たす.

$$L_{\omega_0} = -\mathcal{D}^*_{\omega_0}\mathcal{D}_{\omega_0} + (\nabla^{1,0}*, \nabla^{0,1}S(\omega_0))_{\omega_0}.$$

ここで $\mathcal{D}_{\omega_0} = \overline{\partial} \circ \nabla^{1,0}$ であり、$\overline{\partial} : C^\infty(T(X \setminus D)) \to C^\infty_{(0,1)}(T(X \setminus D))$ は Dolbeault 作用素であり、$\nabla^{1,0}$ は ω_0 によって定まる $(1,0)$-gradient である. 測地球 $B(x_0, r)$ の体積の増大度が $r \to \infty$ としたときに $\mathrm{vol}(B(x_0, r)) = O(r^{2n})$ となることが直接計算することで示せるので、線形作用素 $\mathcal{D}^*_{\omega_0}\mathcal{D}_{\omega_0} : C^{4,\alpha}_{\delta-4} \to C^{0,\alpha}_\delta$ は、適当な weight $\delta > 4$ を取り X 上の非自明な正則ベクトル場で D 上で 0 になるものが存在しないことを仮定することで、同型であることが証明できる. その仮定の下で、もしスカラー曲率 $S(\omega_0)$ が適当な重み付き関数空間の中で小さければ L_{ω_0} が同型であることを示すことができる. 我々が解きたい方程式は $S(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi) = 0$ であるが、それは次の不動点 $\phi \in C^{4,\alpha}_{\delta-4}$ を見つけることに帰着される.

$$\phi = -L^{-1}_{\omega_0}(S(\omega_0) + Q_{\omega_0}(\phi)).$$

これに対し、次の結果が得られた.

定理 16 (A.)**.** 次の条件を仮定する.

- $n \geq 3$ であり、X 上の正則ベクトル場で D 上で消えるものは自明なもの以外存在しない.
- 不等式 $0 < \hat{S}_D < n(n-1)$ を満たす.
- $L_{\omega_0} : C^{4,\alpha}_{\delta-4} \to C^{0,\alpha}_\delta$ は同型であり、$S(\omega_0)$ は適当な重み付き関数空間の中で十分小さい.

このとき、θ_D が cscK 計量であれば、$X \setminus D$ は完備スカラー平坦 Kähler 計量をもつ.

3 つ目の仮定をクリアするためには、そのスカラー曲率が十分小さくなるような Kähler 計量を無限遠点で ω_0 となることを保ちながら構成しなければならない. これを実現するために、退化した複素 Monge-Ampère 方程式を用いる.

l, m を十分大きい正の整数で、直線束 $K_X^{-l} \otimes L_X^m$ が非常に豊富となるようなものとする. 正則切断 σ_F で切り取られる滑らかな超曲面 $F \in |K_X^{-l} \otimes L_X^m|$ に対し次の退化した複素 Monge-Ampère 方程式を考える.

$$(\theta_X + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi)^n = (\sigma_F \otimes \sigma_D^{-m})^{-1/l} \wedge \overline{(\sigma_F \otimes \sigma_D^{-m})^{-1/l}}.$$

これは Yau による結果 [8, Theorem 7] によって解くことができ、Kołodziej によるアプリオリ評価 [6] によって解 φ は X 上有界であることが分かる. これらの結果を用い、多重劣調和関数を $X \setminus (D \cup F)$ 上で適当に貼り合わせることによって次の結果が得られる.

定理 17 (A.). l, m を十分大きい正の整数で、直線束 $K_X^{-l} \otimes L_X^m$ が非常に豊富となるようなものであって、比 m/l が十分小さいものであると仮定する. 滑らかな超曲面 $F \in |K_X^{-l} \otimes L_X^m|$ で $D + F$ が simple normal crossing なものを取る. このとき任意の相対コンパクトな領域 $Y \subset\subset X \setminus (D \cup F)$ に対し、$X \setminus D$ 上の完備 Kähler 計量 ω_F で、そのスカラー曲率 $S(\omega_F)$ が Y 上で 0 となり、Y の補集合上ではいくらでも小さくでき、さらに $D \setminus (D \cap F)$ のある近傍の上で $\omega_F = \omega_0$ を満たすものが存在する.

こうして $X \setminus D$ 上でスカラー曲率がいくらでも小さくできる Kähler 計量が構成できる. しかしこの計量 ω_F は残念ながら漸近錐的幾何を定めないので、先に挙げた Arezzo-Pacard に従うことで得られた結果をこのままでは適応することができない. この問題を克服するために、十分大きい正の整数 β を取り、$h(l, m, \beta) := \dim H^0(K_X^{-l} \otimes L_X^{m+\beta})$ として、多重円盤の元 $s \in \mathbb{D}^{h(l,m,\beta)}$ でパラメーター付けされた自由因子 $F_s \in |K_X^{-l} \otimes L_X^m|$ を考え、適当な閉集合の上で動かし、平均を取ることを考える.

$$\overline{\omega} := \int_{s \in \mathbb{D}^{h(l,m,\beta)}} \omega_{F_s} d\mu(s).$$

ここで μ は Lebesgue 確率測度である. これによって得られた完備 Kähler 計量 $\overline{\omega}$ は漸近錐的幾何であって、そのスカラー曲率をいくらでも小さくすることができ、$S(\overline{\omega})$ が無限遠点で $S(\omega_0)$ と同じように減衰することを示すことができる.

最後に、このようにして得られた計量 $\overline{\omega}$ を先に述べた定理の枠組みにはめ込むことで、次の主定理が得られた.

定理 18 (A.). n 次元偏極多様体 (X, L_X) が次の仮定を満たすとする.

- $n \geq 6$ であり、X 上の正則ベクトル場で D 上で消えるものは自明なもの以外存在しない.
- 不等式 $0 < 3\hat{S}_D < n(n-1)$ を満たす.
- 直線束 $K_X^{-l} \otimes L_X^m$ が非常に豊富となるような自然数 $l > n$ と m が存在し, その比 m/l は十分小さい.

この時、D 上の Kähler 計量 θ_D が cscK 計量であれば、$X \setminus D$ 上に完備スカラー平坦 Kähler 計量が存在する.

参考文献

[1] C. Arezzo and F. Pacard, Blowing up and desingularizing constant scalar curvature Kähler manifolds, Acta Math. 196 (2006), no. 2, 179–228.

[2] C. Arezzo and F. Pacard, Blowing up Kähler manifolds with constant scalar curvature II, Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 2, 685–738.

[3] S. Bando and R. Kobayashi, Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds. II, Math. Ann. 287 (1990), 175–180.

[4] E. Calabi, Métriques Kähleriennes et fibrés holomorphes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 12 (1979), no. 2, 269–294.

[5] A. D. Hwang and M. A. Singer, A momentum construction for circle-invariant Kähler metrics, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 6, 2285–2325.

[6] S. Kołodziej, The complex Monge-Ampère equation, Acta Math. 180 (1998), 69–117.

[7] G. Tian and S. T. Yau, Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II, Invent. Math. 106 (1991), no. 1, 27–60.

[8] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations, I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.