Chip-firing Game を構成するための有限言語に対する特徴づけ

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
赤坂健太朗 (Kentaro AKASAKA)

1　導入

Chip-firing game とは, Björner ら [1] によって提起された, グラフ上で行う一人用のゲームである. プレイヤーは, 各頂点にチップが配置されたグラフから頂点を一つ選び, 隣接する頂点にチップをばら撒く操作を繰り返し行っていく. chip-firing game についてはすでに, 有限性など様々な観点から研究がなされており, Klivans[2] によって詳しく紹介されている. chip-firing game を研究する手法のひとつとして Björner らは, chip-firing game から形式言語を構成し, その形式言語上で成り立つ性質を chip-firing game に適用するという方法を用いていた. 本研究は, この chip-firing game と形式言語の関係についてより詳しく掘り下げ, 形式言語から chip-firing game を構成するための必要十分な条件付けを得ることを目標としている. 本稿では, chip-firing game について成り立つ諸性質や形式言語との具体的な関係, そして, 一部の言語とゲームとの間で得られた結果について紹介する.

2　準備 1, Chip-firing game のルールと性質

グラフに関する記号や条件を整理する. G を連結でループを持たない有限グラフとし, $V = \{1, \ldots, n\}$ を G の頂点の集合とする. $v, w \in V$ に対し, v の次数, すなわち v に接続する辺の本数を $\deg(v)$ で表し, v と w とを結ぶ辺の本数を $e(v, w)$ と表す. これらの記号を用いて, グラフ G 上での *chip-firing game* のルールを示していく.

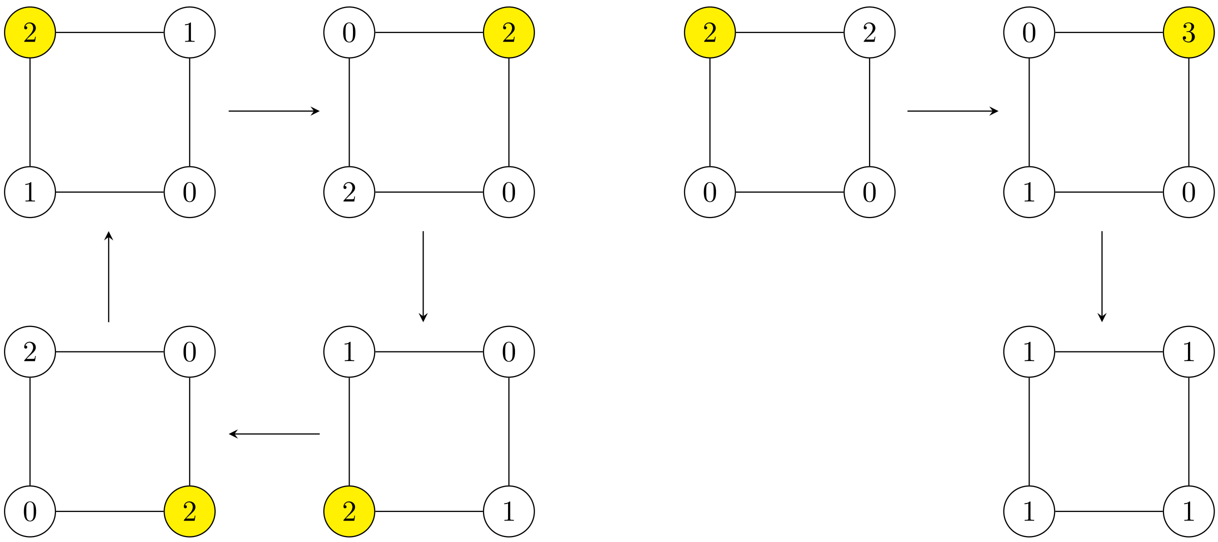
はじめに, G の各頂点にチップを配置する. チップの配置は写像 $\varphi\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ によって表すこととする. 各 $v \in V$ に対し, $\varphi(v)$ が v 上のチップの枚数となる. ゲームはまず, 自身の次数以上のチップを保有する頂点を選ぶことから始まる. $\varphi(w) \geq \deg(w)$ を満たす頂点 w に対し, *fire* という操作を行う. w が fire されたとき, w 上のチップは, w に接続する各辺に沿って 1 枚ずつ, その辺のもう一方の端点に移動していく. この操作によって得られる新たな配置 φ' は,

$$\varphi'(v) = \begin{cases} \varphi(w) - \deg(w) & (v = w) \\ \varphi(v) + e(v, w) & (v \neq w) \end{cases}$$

と定義できる. 頂点を選び fire する操作を 1 ステップとし, これを何度も繰り返すことでゲームが構成される. ゲームが, 各ステップで次数以上のチップを持つ頂点 (以降, fire 可能な頂点という) を選

び fire していることを強調して, そのようなゲームを *legal game* と呼ぶことがある. ゲームには, 何度頂点を fire してもさらに fire 可能な頂点を見つけられるもの (*infinite game*) と, 途中で fire 可能な頂点が無くなりそれ以上ゲームを続けられなくなるもの (*finite game*) が存在する.

例 2.1. 以下は同じグラフ上の 4 枚のチップの配置から始めたゲームの遷移図であるが, 左は infinite game を導き, 右は finite game となる.



ゲームの有限性にまつわる, 次の 3 つの性質が知られている.

補題 2.2. ([1, Lemma 3.1]) chip-firing game が無限に続くとき, すべての点は無限に fire される.

補題 2.3. ([1, Lemma 3.2]) chip-firing game が有限回しか続けられないとき, 一度も fire されない点が存在する.

補題 2.4. ([1, Theorem 2.1]) 連結グラフとその上でのチップの配置が与えられたとき, 得られるゲームの性質として次のどちらか一方のみが言える.

(1) すべての legal game がその後も無限に続けられる.
(2) 同じ回数だけチップを fire し, 同じ配置で fire 可能な頂点がなくなる.

また, (2) の場合において, このような配置に至るまでに各頂点が fire される回数もまた, どの legal game においても一致する.

定理 2.3. は, ゲームの有限性がチップを選ぶ順番によらないことを示している.

3 準備 2, Chip-firing game から得られる形式言語

形式言語に関する用語の定義は, 主に [3, 第 3 章 §1] による. はじめに, 形式言語の定義を行う. $a, b, c, \ldots$ のように表される**記号** (**文字**ともいう) が与えられているものとする. 記号の有限集合を**アルファベット**と呼び, Σ で表す. アルファベットに属する記号を重複を許して有限個並べたものを, そ

のアルファベット上の**語**という．特に，記号の個数が 0 である語を**空語**といい，ϵ で表す．そして，Σ 上の語の任意の集合を，Σ 上の**形式言語** (以降，単に**言語**) という．

例 3.1. 記号 $1, 2$ からなるアルファベットは $\{1, 2\}$ であり，1221 は $\{1, 2\}$ 上の語，$L = \{\epsilon, 1, 2, 12, 22, 121\}$ は $\{1, 2\}$ 上の言語である．

続いて，語に関する用語を定義していく．Σ 上の語 w について，w を構成する記号の数を語 w の**長さ**といい，$|w|$ で表す．また，$\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ と表されるとき，w の**スコア** $[w]$ を，$\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上の元であり，$i \in \Sigma$ に対し，$[w]$ の第 i 成分 $[w]_i$ が w に記号 i が現れる回数を表すものと定義する．

例 3.2. $\Sigma = \{1, 2\}$ 上の語 $w = 22112$ に対し，$|w| = 5$, $[w] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

同じアルファベット Σ 上の語 w_1, w_2 に対し，$w_1 w_2$ を w_1, w_2 の**連接**という．このとき，w_1 を $w_1 w_2$ の**接頭語**，w_2 を**接尾語**という．w_3 も Σ 上の語としたとき，w_2 を $w_1 w_2 w_3$ の**部分語**という．

例 3.3. $\{1, 2\}$ 上の語 $w_1 = 121$, $w_2 = 12$ としたとき，$w_1 w_2 = 12112$ となる．12112 に対し，211 は部分語であり，接頭語や接尾語ではない．121 は接頭語であり部分語でもある．空語 ϵ は任意の語の接頭語，接尾語，部分語となり得る．

形式言語の表現を用いて chip-firing game の性質を考えていく．あるグラフ G とチップの配置が与えられいるとし，その上でのゲームを行ったとき，ゲーム中に頂点を fire する順番を記録すると，これらは頂点の集合 $V(G)$ をアルファベットとしたときの語とみなすことができる．L をすべての legal game の記録の集合 (以降 *record set* と呼ぶ) としたとき，L は $V(G)$ 上の言語となっていることがわかる．legal game の record set L について，次の性質がわかっている．

補題 3.4. ([1, Lemma 2.4]) legal game の record set は，locally free 性，permutable 性，left-hereditary 性を満たす言語である．

ここで，left-hereditary 性，locally free 性，permutable 性とは，それぞれ以下に示すような言語の特徴付けである．

定義 3.5. Σ 上の言語 L に対する以下の特徴付け (LH), (LF), (PM) をそれぞれ，*left-hereditary* 性，*locally free* 性，*permutable* 性という．

(LH)　L に属する任意の語に対し，その任意の接頭語が L に含まれる．

(LF)　任意の $\alpha \in L$ と Σ に含まれる異なる任意の文字 x, y に対し，$\alpha x \in L$, $\alpha y \in L$ となるならば，$\alpha xy \in L$ が成り立つ．

(PM)　$[\alpha] = [\beta]$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in L$ に対し，ある $x \in \Sigma$ で $\alpha x \in L$ となるならば，$\beta x \in L$ が成り立つ．

ここで，ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$u \vee v = \begin{pmatrix} \max\{u_1, v_1\} \\ \vdots \\ \max\{u_n, v_n\} \end{pmatrix}$ と定義

し, 言語の特徴付けをもうひとつ定義する.

定義 3.6. 言語 L に対する次の特徴付け (SE) を, *strong exchange* 性という.

(SE) 任意の $\alpha, \beta \in L$ に対し, α の部分語 α' を, $\beta\alpha' \in L$ かつ $[\beta\alpha'] = [\beta] \vee [\alpha]$ が成り立つように取れる.

これらの特徴付けの定義は, [1] による. これまでに挙げた言語の特徴付けには, 次のような関係が成り立っている.

補題 3.7. ([1, Lemma 2.2]) locally free 性, permutable 性, left-hereditary 性を持つすべての言語は strong exchange 性を持つ. また, strong exchange 性を持つすべての言語は locally free 性, permutable 性を持つ.

これにより, chip-firin game の record set では, (SE) も成り立っているとわかる. (LH) を満たす言語 L において, 語 $\alpha \in L$ が L に含まれる他のどの語の接頭語にもならないとき, α は L において *basic word* であるという. 例えば 121 が $\{1, 2\}$ 上の言語 L の basic word であるとき, 語 1212 や 121112 などは L には含まれない. L が (SE) を満たすとき, L 中の basic word はすべて同じ長さ, 同じスコアを持ち, basic word 以上の長さを持つ語は L に含まれないことが直ちにわかる. このときの basic word の長さを, L の *rank* という. rank が無限であるとき, L は basic word を持たないことになる. record set の rank が値を持つとき, 次が成り立つ.

補題 3.8. ([1, Lemma 2.5]) legal game によって得られる言語の rank が値を持つとする. このとき 2 つの legal game について, これらが同じ配置に至ることと, 同じスコアを持つこととは同値である.

4 主結果

補題 3.6. より chip-firing game の record set は (LH), (LF), (PM) を満たす言語となることがわかったが, 反対に, (LH), (LF), (PM) を満たす言語は, 何らかのグラフとチップの配置から得られる chip-firing game の record set となっているのだろうか. 実際には, これらを満たすが chip-firing game を構成できない言語が存在する.

例 4.1. $\Sigma = \{1, 2\}$ 上の言語 $L = \{\epsilon, 1, 12, 122\}$ は, (LH), (LF), (PM) を満たすが, chip-firing game を構成できない. 仮に, あるグラフ上で配置 φ から始まる chip-firing game の record set であるとすると, $2 \notin L$ より,

$$\varphi(2) < \deg(2) \tag{1}$$

また, $122 \in L$ より,

$$\varphi(2) + e(1, 2) \geq 2\deg(2)$$

ここで, $\deg(2) \geq e(1, 2)$ であるので,

$$\varphi(2) \geq 2\deg(2) - e(1, 2) \geq 2\deg(2) - \deg(2) = \deg(2) \tag{2}$$

となり, (1) と (2) の間に矛盾が生じる.

では, 他に何らかの特徴付けを施せば, 言語 L が chip-firing game を構成できるようになるのだろうか. この問いに対し, $|\Sigma| = 2$ で, 言語が有限の場合に限り具体的な条件付けを得られたので, これを紹介する. ここで, $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. また, 集合 X の凸包を $\mathrm{Conv}(X)$ で表すものとする.

定義 4.2. $i = 1, 2$ に対し $X_i := \{[w] \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \mid w \in L$ かつ $wi \notin L\}$, $X'_i := \{x + g_i \mid x \in X_i\}$

これらの記号を用いて, 次の特徴付けを定義する.

定義 4.3. 言語 L に対する特徴付け $(\ast)$ を, 以下のように定義する.

$(\ast)$　$i = 1, 2$ に対し, 任意の $x \in X_i$ で $x \pm g_i \notin \mathrm{Conv}(X_i)$ が成り立つ.

さらにもうひとつ, 特徴付けを定義する.

定義 4.4. 言語 L に対する特徴付け (☆) を, 以下のように定義する.

(☆)　語 $w \in L$ と, $a \neq b$ となる文字 $a, b \in \Sigma$ に対し, $wabb \in L$ ならば $wb \in L$ が成り立つ.

これらの特徴付けを満たすことが, 言語から chip-firing game を構成できるための必要十分条件となる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

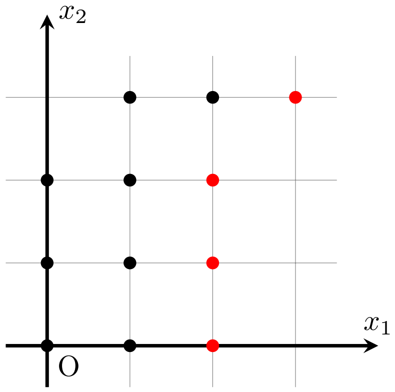
定理 4.5. $\Sigma = \{1, 2\}$ 上の有限言語 L に対し, 次の (1), (2) が同値となる.

(1)　L が (LH), (LF), (PM), (☆), $(\ast)$ を満たす.

(2)　あるグラフ G と, その上で $1, 2$ 以外の頂点を fire できず finite game を導くチップの配置 φ があり, L がこのグラフと配置から得られる legal game の record set となっている.

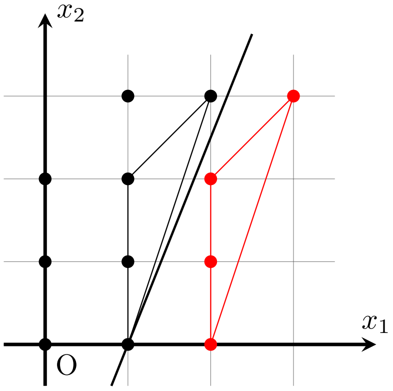
以下に, 言語から chip-firing game を構成する例を示す.

例 4.6. $L = \{\epsilon, 1, 2, 12, 21, 22, 122, 212, 221, 1222, 2122, 2212, 12221, 21221, 22121\}$ は, (LH), (LF), (PM), (☆), $(\ast)$ をすべて満たす $\Sigma = \{1, 2\}$ 上の言語である. この L に対し, $X_1 = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, $X'_1 = \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, となる. L に含まれる文字のスコアと X'_1 の点をすべてプロットすると以下のようになる.

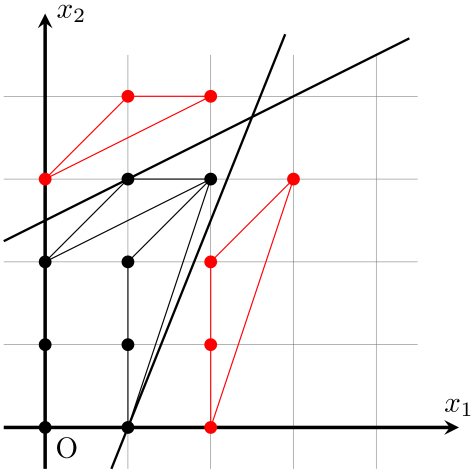


$(\ast)$ が成り立つとき, $\mathrm{Conv}(X_1)$ と $\mathrm{Conv}(X'_1)$ は共有点を持たず, $\mathrm{Conv}(X_1)$ と $\mathrm{Conv}(X'_1)$ を分離す

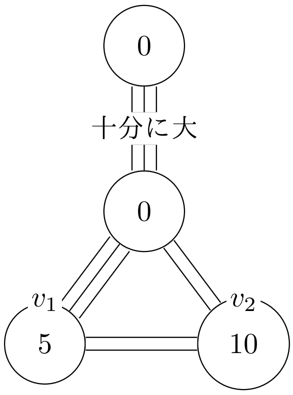
る超平面 H_1 が得られる ($\mathrm{Conv}(X_1)$ には接していてもよい).



同様に, X_2 と X_2' を分離する超平面 H_i を得られる．有理数の稠密性から, この H_i の法線ベクトル $\boldsymbol{h}_i = \begin{pmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{h}_i \in \mathbb{Q}^2$ となるよう H_i をとれる．また, (☆) が成り立つとき, $h_{ii} < 0$, $h_{ij} \geq 0$, $h_{i1} + h_{i2} \leq 0$ を満たす H_i をとることができる．さらに, これらを満たす H_1, H_2 の交点 α を, $\alpha \in \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$ とできる．与えられた L に対し, これらの条件を満たす超平面として, $H_1 : -5x+2y = -5$, $H_2 : x - 2y = -5$ をとることができ, 交点 $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$ である．



$(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$ が対称行列となるよう $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ を定めると, $\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ とできる．このとき, $\deg(1) = -h_{11} = 5$, $\deg(2) = -h_{22} = 4$, $e(1,2) = h_{12} = h_{21} = 2$, その他の頂点で次数が十分に大となるグラフと, $\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, その他の頂点でチップ数 0 となる配置 φ における chip-firing game の record set が L と一致する．以下に, そのようなグラフとチップの配置の例を示す.



参考文献

[1] Anders Björner; László Lovász; Peter W. Shor, *Chip-firing games on graphs*, European Journal of Combinatorics **12** (1991), pp283-291.

[2] Caroline J. Klivans, *The Mathematics of Chip-firing*, Chapman and Hall/CRC (2018).

[3] 福村晃夫, 稲垣康善, オートマトン・形式言語理論と計算論, 岩波講座情報科学 **6**, 岩波書店 (1982).