Relationship between quandle shadow cocycle invariants and Vassiliev invariants of links

大阪市立大学数学研究所
阿部翠空星 (Sukuse ABE)

概要

ある種の結び目に対して，ある条件をみたすアレクサンダーカンドルを用いたカンドル（シャドー）コサイクル不変量からヴァシリエフ不変量が導かれることを証明する．[1] で述べた定理をより一般的にしたものである．詳細は論文 [2] を参照してほしい．

1　導入

円周 S^1 の 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に滑らかに埋め込んだ像を結び目という．l 個の円周の非交和を $\mathbb{R}^3$ に滑らかに埋め込んだ像を l 成分の絡み目という．とくに，1 成分の絡み目が結び目である．ひもが自己交差しないように連続変形してうつりあう結び目は同じ結び目とみなす．このとき，2 つの結び目はイソトピックという．イソトピックな結び目がイソトピックであることを証明するには変形の過程を具体的に示して見せればよい．一方，イソトピックでないことを示すときには不変量を用いる．ここで，

$$\text{写像 } I : \{\text{ 結び目（絡み目）}\} \to (\text{ある集合})$$

が，イソトピックな結び目（絡み目）K，K' について $I(K) = I(K')$ をみたすとき，I を結び目（絡み目）のイソトピー不変量という．

結び目（絡み目）を射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ により平面 $\mathbb{R}^2$ に射影して線が交差しているところに上下をつけたものを結び目（絡み目）の図式という．K，K' を結び目（絡み目）とし，D，D' をそれらの図式とするとき，K と K' がイソトッピクであることの必要十分条件は，D に次のライデマイスター移動 R1，R2，R3（図 1）と図式のイソトピーを有限回ほどこして D' がえられることである．

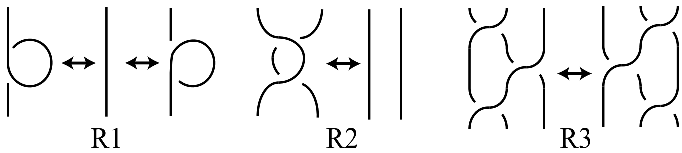


図 1　ライデマイスター移動 R1，R2，R3

様々な不変量があるなかで，本文ではカンドルとよばれる代数系をもちいたカンドル（シャドー）コサイクル不変量と組みひも群からつくられるオペレータ不変量を紹介する．オペレータ不変量からはジョーンズ多項式とよばれる結び目（絡み目）の不変量を導くことができ，ジョーンズ多項式からヴァシリエフ不変量が導けることを証明する．次に，オペレータ不変量からカンドル（シャドー）コ

サイクル不変量が導くことができることを紹介する．最後に，最新の結果としてアレクサンダーカンドルをもちいたカンドル（シャドー）コサイクル不変量からヴァシリエフ不変量が導ける例があることを証明する．これらの不変量の間の関係をまとめると以下の図 2 のようになる．本文の詳細については論文 [2] を参照してほしい．

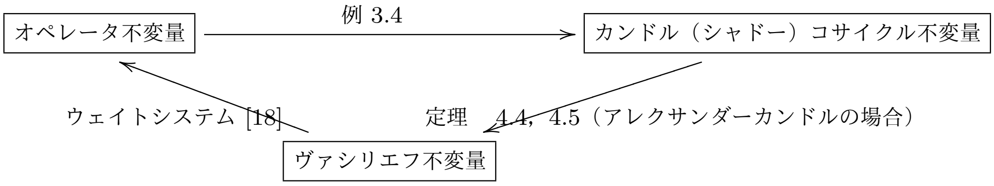


図 2

ここで，すべての結び目に対して、すべてのアレクサンダーカンドルをもちいたカンドル（シャドー）コサイクル不変量からヴァシリエフ不変量が導けるわけではない．ヴァシリエフ不変量が導けない「例外の結び目」と「例外のアレクサンダーカンドルをもちいたカンドル（シャドー）コサイクル不変量」が存在することは分かっている．ヴァシリエフ不変量が導ける結び目はアレクサンダー多項式とよばれる多項式不変量の零点が，複素平面上の単位円周上にあることが必要条件である．

2 カンドルとカンドル（シャドー）コサイクル不変量

集合 X と X の 2 項演算 $*$ が次の 3 つの公理を満たすとき $(X, *)$ をカンドルという．

(i) 任意の $a \in X$ に対して, $a * a = a$ が成り立つ．

(ii) 任意の $a, b \in X$ に対して, $a = c * b$ をみたす $c \in X$ がただ 1 つ存在する．

(iii) 任意の $a, b, c \in X$ に対して, $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ が成り立つ．

例えば，ローラン多項式環 $\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]$ とそのイデアル J について商加群 $\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J$ の可逆な元を $\omega \in \mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J$ とする．このとき任意の $x, y \in \mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J$ に対して，$x * y = \omega x + (1-\omega)y$ で 2 項演算を定めることによりできるカンドル $(\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J, \omega)$ をアレクサンダーカンドルという．有向結び目 K とその図式 D を考える．$\mathcal{A}(D)$ を図式 D の弧の連結成分全体の集合とする．写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が図式の全ての交点で $C(\gamma_1) * C(\gamma_2) = C(\gamma_3)$ をみたすとき C を結び目図式 D の X 彩色という．ただし，γ_2 は γ_1 と γ_3 の上の弧であり，γ_1 は γ_2 の右側の弧である（図 3)．

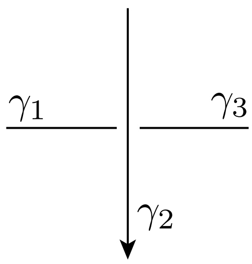


図 3　Coloring of crossings

D の X 彩色の個数は結び目 K の不変量となり X 彩色数とよばれる [9].

カンドルには群と同様にホモロジー群とコホモロジー群が定義出来る [5]．A を有限群として，写像 $X^n \to A$ の全体からなるアーベル群を $C^n(X;A)$ とかく．さらに，コチェイン群 $C_Q^n(X;A)$ を以下のように定義する．

$$C_Q^n(X;A) := \{\ f \in C^n(X;A) \mid\ f(x_1,\ldots,x_n) = 0 \,\mathrm{when}\, x_i = x_{i+1}\,\mathrm{for\ \ some}\ \ i\}\ .$$

さらに $n \geq 1$ に対して, 双対境界作用素 $\delta_n : C_Q^n(X;A) \longrightarrow C_Q^{n+1}(X;A)$ を以下のように定義する．

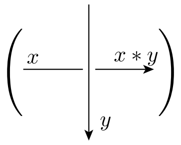
$$\begin{aligned}\delta_n(f)(x_1,\ldots,x_{n+1}) := \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i\big(&f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1})\\ &- f(x_1 * x_i,\ldots,x_{i-1} * x_i, x_{i+1},\ldots,x_{n+1})\big).\end{aligned}$$

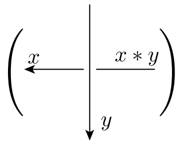
$\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$ がわかり，n 次カンドルコホモロジー群が

$$H_Q^n(X;A) := \frac{\mathrm{Ker}\delta_n}{\mathrm{Im}\delta_{n-1}}$$

と定義される．

次に X 彩色とカンドルコホモロジー群をつかってカンドル（シャドー）コサイクル不変量を定義する [5, 6]．有向結び目 K とその図式 D を考える．図式 D の X 彩色 C が与えられているとき，D の各交点の重みを

W  $= f(x,y) \in A$

W  $= f(x,y)^{-1} \in A$

で定める．ここで f は 2 次コサイクルである．さらに，すべての交点 x の重みの積とすべての D の X 彩色 C に対して和をとったものを

$$\Phi_f(D) = \sum_C \prod_x W_f(x;C) \in \mathbb{Z}[A]$$

とおく．$Z[A]$ は A の群環である．$\Phi_f(D)$ は図式 D のライデマイスター移動で不変であり，よって K の不変量である．これを K のカンドルコサイクル不変量といい，$\Phi_f(K)$ とかく．カンドル X と有向結び目の図式 D について，D の X 彩色を拡張する写像 $C : \mathcal{A}(D) \sqcup \{D$ の領域 $\} \to X$ が図式の各交点で図 3 の関係をみたし，図式の各辺で

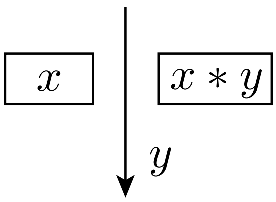
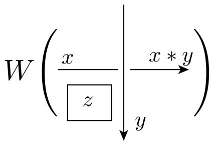
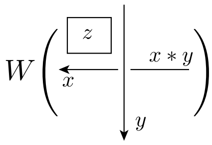


図 4　Boxes indicate the colorings of regions

の関係をみたすとき，C を結び目図式 D のシャドー X 彩色という．$\mathcal{A}(D)$ の彩色が先に与えられると，ある 1 つの領域（たとえば，非有界領域）の彩色を与えるとその他のすべての領域の彩色はただ 1 つに整合性をもって定まることに注意する．有向結び目 K とその図式 D を考える．図式 D のシャドー X 彩色 C が与えられているとき，D の各交点の重みを



$$= \phi(z,x,y) \in A$$



$$= \phi(z,x,y)^{-1} \in A$$

で定める．ここで ϕ は 3 次コサイクルである．さらに，すべての交点 x の重みの積とすべての D のシャドー X 彩色 C に対して和をとったものを

$$\Phi_\phi(D) = \sum_C \prod_x W_\phi(x;C) \in \mathbb{Z}[A]$$

とおく．$\Phi_\phi(D)$ は図式 D のライデマイスター移動で不変であり，よって K の不変量である．これを K のカンドルシャドーコサイクル不変量といい，$\Phi_\phi(K)$ とかく．

3　組みひも群の表現と絡み目の不変量

$\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ に n 本のひもを端点が $\{0,1,\ldots,n\} \times \{0\} \times \{0,1\}$ となり，高さ関数に関して単調になるように埋め込んだ像を n 本の組みひもという．n 本の組みひものイソトピー類全体の集合は、組みひもを縦に連結する操作を積とみなして群となる．この群を B_n と書き、組みひも群という．

$$B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i(|i-j| \geq 2)\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle$$

と群表示されることが知られている．組みひもの上端と下端の点を順番につなぐことで有向絡み目がえられる．この有向絡み目をその組みひもの閉包という．以下の定理はアレクサンダーの定理という．

Theorem 3.1 ([3])**.** 任意の絡み目は，ある組みひもの閉包として表せる．

組みひも群の表現 $\psi_n : B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を

$$\psi_n(\sigma_i) = (\mathrm{id}_V)^{\otimes i-1} \otimes R \otimes (\mathrm{id}_V)^{\otimes n-i-1}$$

と定める．このとき R が満たすべき条件は

$$(R \times \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes R)$$

である．この等式をヤンーバクスター方程式といい，その解を R 行列という [10, 11]．有限次元ベクトル空間 V_1，V_2 に対して，trace_2 は V_2 の縮約である．例えば，基底が e_0, e_1 をもつ 2 次元ベ

クトル空間 V_1，V_2 で，$V_1 \otimes V_2$ の基底を $\{e_0 \otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1\}$ に関して，線型写像 $R \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$ が

$$R = \begin{pmatrix} R^{00}_{00} & R^{00}_{01} & R^{00}_{10} & R^{00}_{11} \\ R^{01}_{00} & R^{01}_{01} & R^{01}_{10} & R^{01}_{11} \\ R^{10}_{00} & R^{10}_{01} & R^{10}_{10} & R^{10}_{11} \\ R^{11}_{00} & R^{11}_{01} & R^{11}_{10} & R^{11}_{11} \end{pmatrix}$$

のように表示されているとき，$\mathrm{trace}_2(R)$ は

$$\mathrm{trace}_2(R) = \begin{pmatrix} R^{00}_{00} + R^{01}_{01} & R^{00}_{10} + R^{01}_{11} \\ R^{10}_{00} + R^{11}_{01} & R^{10}_{10} + R^{11}_{11} \end{pmatrix}$$

のように行列表示される．

Theorem 3.2 (chap.I [20] and chap.X [12])**.** L を有向絡み目とし，$b \in B_n$ をその閉包が L にイソトピックであるような組みひもとする．R を R 行列とし，$h \in \mathrm{End}(V)$ が

$$\mathrm{trace}_2((\mathrm{id}_V \otimes h) \cdot R^{\pm}) = \mathrm{id}_V$$
$$R \cdot (h \otimes h) = (h \otimes h) \cdot R$$

を満たす線型写像とする．このとき，$\mathrm{trace}(h^{\otimes n} \cdot \psi(b))$ は L のイソトピー不変量になる．

Example 3.3 (Jones, V.F.R.)**.**

$$R = \begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^{-1/2} - q^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

とすると $\mathrm{trace}(h^{\otimes n} \cdot \psi(b))$ はジョーンズ多項式とよばれる不変量になる．

Example 3.4 ([17],[19])**.**

$$R^{xy}_{x'y'} = \begin{cases} f(x,y), & (when\ x' = y\ and\ y' = x * y), \\ 0, & (otherwise). \end{cases} \tag{1}$$

のような行列成分をもつ R 行列から結び目の不変量をつくるとカンドルコサイクル不変量が構成される．

4 ヴァシリエフ不変量とカンドル（シャドー）コサイクル不変量の関係

次にヴァシリエフ不変量を定義する．有向結び目のイソトピー類の全体によってはられる $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間を $\mathcal{K}$ とする．S^1 の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込みでその特異点が横断的な 2 重点であるようなものを特異結び目という．特異結び目に対して，その各 2 重点を

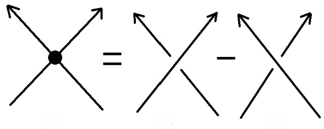


図 5　Singular point.

のように線型的に解消することにより，特異結び目を $\mathcal{K}$ の元とみなす．d 個の 2 重点をもつような特異結び目がはる $\mathcal{K}$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{K}_d$ とする．$\mathcal{K}_d$ は $\mathcal{K}$ のフィルトレーション

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_d \supset \cdots$$

を定めている．B をアーベル群として，$\mathcal{K}_{d+1}$ に制限すると 0 写像になる線型写像 $\mathcal{K} \to B$ を d 次のヴァシリエフ不変量という [7, 8, 21].

Theorem 4.1 ([4])**.** 結び目 K に対して，例 *3.3* の不変量に $q = e^{\hbar}$ を代入してマクローリン展開したときの $\hbar^d$ の係数は K の d 次のヴァシリエフ不変量である．

Proof. 例 3.3 の不変量を線型的に $\mathcal{K}$ に拡張すると，2 重点に対する線型写像は $R - R^{-1}$ で与えられる．$\hbar = 0$ のとき $R = R^{-1}$ となるので $R - R^{-1}$ の行列成分は $\mathbb{C}[[\hbar]]$ において $\hbar$ で割り切れる．$\psi(b)$ は R 行列の積をとって構成されるので，$d+1$ 個の 2 重点をもつ特異結び目 K に対して $\mathrm{trace}(h^{\otimes n} \cdot \psi(b))$ は $\hbar^{d+1}$ で割り切れる．特に $\hbar^d$ の係数は 0 である． □

p を素数，m を正の整数，$q = p^m$ として $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする．また，χ を整数環の元，a，b を正の整数，$\hbar$ を $2\pi\sqrt{-1}\chi/ap$ とする．カンドルコサイクル不変量 $\Phi_f(K)$ またはカンドルシャドーコサイクル不変量 $\Phi_\phi(K)$ の t，ω にそれぞれ $e^{a\hbar}$，$e^{b\hbar}$ を代入してマクローリン展開することを考える．$\Phi_\phi(K)|_{t=e^{a\hbar},\omega=e^{b\hbar}} = \sum_{d=0}^{\infty} u_d(K)\hbar^d$ とすると $u_d(K)$ は K から一意には定まらない．さらに，$\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q]$ は完備な空間ではないためこの等号は成立しない．

Theorem 4.2. $(d!u_d(L) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の値は $\Phi_\phi(K)$ から一意に定まる．

Proof. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に体して，$n = kp + i$ をみたす $k \in \mathbb{Z}$ と 整数 $0 \leq i < p$ が存在する．

$$t^{kp+i}|_{t=e^{a\hbar}} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!}(kp+i)^d (a\hbar)^d \equiv \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!} i^d (a\hbar)^d = t^i|_{t=e^{a\hbar}},$$

が成り立つので $(d!u_d(K) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は $\Phi_\phi(K)$ から一意に定まる． □

よって，次の注意と定理をえる．

Remark 4.3. $t = e^{a\hbar}$ の ‘代入して展開する’ とは環準同型 $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^p - 1, g(t)) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[\hbar]]$ で $e^{a\hbar} \mapsto 0!u_0(K) + 1!u_1(K)\hbar + 2!u_2(K)\hbar^2 + \cdots$ で定める．ここで，$g(t)$ は $\mathbb{F}_q \cong \mathbb{F}_p[t]/(g(t))$ かつ $g(e^{a\hbar}) = 0$ をみたす多項式ででであり，$u_d(K)$ は d 次式の係数の和である．

Theorem 4.4. *A を $\mathbb{F}_q$，J を $\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]$ の任意のイデアル，ω を可逆な $\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J$ の元，$f \in H^2_Q((\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J, \omega); \mathbb{F}_q)$ を ω をパラメータとするアレクサンダーカンドル $(\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J, \omega)$ の*

2 次コサイクルとする．

$$\Phi_f(K) \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}_q] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^p-1, g(t), h_1(\omega), \ldots, h_\ell(\omega)),$$

に $t = e^{a\hbar}$，$\omega = e^{b\hbar}$ を代入する．ここで $g(t)$ は $\mathbb{F}_q \cong \mathbb{F}_p[t]/(g(t))$ をみたす多項式であり，$h_1(\omega), \ldots, h_\ell(\omega)$ は K を彩色することによりあらわれる ω の関係式であり，$h_1(\omega), \ldots, h_\ell(\omega) \in \mathbb{F}_q$ である．$g(e^{a\hbar}) = h_1(e^{b\hbar}) = \cdots = h_\ell(e^{b\hbar}) = 0$ をみたす正の整数 a，b が存在するとする．このとき次の級数

$$\Phi_f(K)|_{t=e^{a\hbar}, \omega=e^{b\hbar}} \mapsto \sum_{d=0}^{\infty} d!u_d(K)\hbar^d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[\hbar]]$$

がえられる．このとき，$(d!u_d(K) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は K の d 次のヴァシリエフ不変量である．

Proof. 式 (1) から R 行列の行列成分は

$$R^{xy}_{x'y'} = \begin{cases} t^{f(x,y)}, & (when\ x' = y\ and\ y' = \omega x + (1-\omega)y), \\ 0, & (otherwise). \end{cases}$$

となっている．$\hbar = 0$ のとき $x' = y$ かつ $y' = x$ となるので R 行列の行列成分 R^{xy}_{yx} は 1 である．また，R 行列の逆行列の行列成分 ${R^{-1}}^{yx}_{xy}$ は 1 である．次に x と y，x' と y' を入れかえた成分は

$$R^{yx}_{y'x'} = \begin{cases} t^{f(y,x)}, & (when\ y' = x\ and\ x' = \omega y + (1-\omega)x), \\ 0, & (otherwise). \end{cases}$$

となっている．$\hbar = 0$ のとき $y' = x$ かつ $x' = y$ となるので R 行列の行列成分 R^{yx}_{xy} は 1 である．また，R 行列の逆行列の行列成分 ${R^{-1}}^{xy}_{yx}$ は 1 である．よって，$R = R^{-1}$ となるので，$R - R^{-1}$ の行列成分は $\hbar$ で割り切れる．$\Phi_f(K)$ は R 行列の積をとって構成されるので，$d+1$ 個の 2 重点をもつ特異結び目 K に対して $\Phi_f(K)$ は $\hbar^{d+1}$ で割り切れる．特に $\hbar^d$ の係数は 0 である．さらに，前述の一意性から $(d!u_d(K) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は K の d 次のヴァシリエフ不変量である． □

Theorem 4.5. 記号は定理 *4.4* と同様で，$\phi \in H^3_Q((\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J, \omega); \mathbb{F}_q)$ を ω をパラメータとするアレクサンダーカンドル $(\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]/J, \omega)$ の 3 次コサイクルとする．また，

$$\Phi_\phi(K)|_{t=e^{a\hbar}, \omega=e^{b\hbar}} \mapsto \sum_{d=0}^{\infty} d!u_d(K)\hbar^d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[\hbar]]$$

とする．このとき，$(d!u_d(K) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は K の d 次のヴァシリエフ不変量である．

Remark 4.6. カンドル（シャドー）コサイクル不変量とヴァシリエフ不変量は相性が良くない．なぜなら，カンドル（シャドー）コサイクル不変量は値が有界であるがヴァシリエフ不変量は結び目の交点数が多くなるにつれて値が大きくなるため非有界である．よって，一見するとカンドル（シャドー）コサイクル不変量から導かれるヴァシリエフ不変量はすべて自明な値をとると思われる．しかし，定理 4.4 と定理 4.5 で重要なことは $\mathbb{Z}[\zeta^{\pm}]$ のイデアル J が任意であることである．J が変わるとヴァシリエフ不変量の値も変わるのである．つまり，イデアル J の数（無限個）だけヴァシリエフ不変量は存在する．

Remark 4.7. $g(e^{a\hbar}) = h_1(e^{b\hbar}) = \cdots = h_\ell(e^{b\hbar}) = 0$ をみたす正の整数 a，b が存在しなければならない．このため，すべての結び目 K に対して，すべてのアレクサンダーカンドルをもちいたカンドル（シャドー）コサイクル不変量からヴァシリエフ不変量が導けるわけではない．

Example 4.8. $(2,n)$-トーラス結び目（$n \equiv 0 \pmod 3$）についてカンドルシャドーコサイクル不変量を計算する．$H^3_Q((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\omega);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [16] であり，3 次コサイクルは $p=3$ とした

$$(x-y)\frac{1}{3}(y^3 - z^3 - (y - z + \omega^{-1}z)^3 + (\omega^{-1}z)^3) \pmod 3$$

であらわされる望月 3 次コサイクルである [13, 14, 15].

$$\begin{aligned}\Phi_\phi(K) =& 3 + 2t^{\frac{n}{3}(1-\omega)\omega^{-2}} + t^{\frac{n}{3}(-2+\omega^{-1}+\omega)} + 2t^{\frac{n}{3}(2-\omega^{-1}-2\omega+2\omega^2-\omega^3)} + t^{\frac{n}{3}(-2-2\omega^{-2}+\omega+2\omega^2+\omega^3)}\\ &\in \mathbb{Z}[t^{\pm}]/(t^3-1, \omega^2-\omega+1).\end{aligned}$$

に $\hbar = \pi\sqrt{-1}\chi/3$ として，$t = e^{2\hbar}$，$\omega = e^{\hbar}$ を代入すると

$$\begin{aligned}&\Phi_\phi(K) \mapsto 9 + \frac{20n}{3}\hbar^2 + \frac{10n}{3}\hbar^3 + \Big(\frac{22n}{9} + \frac{292n^2}{9}\Big)\hbar^4 + \Big(\frac{5n}{18} + \frac{76n^2}{3}\Big)\hbar^5 \qquad (2)\\ &+ \frac{1}{162}(-45n + 10194n^2 + 13808n^3)\hbar^6 + \frac{1}{108}(-35n + 4524n^2 + 11568n^3)\hbar^7 + O(\hbar^8).\end{aligned}$$

をえるので, 0 次のヴァシリエフ不変量は $9 \equiv 0 \pmod 3$, 2 次のヴァシリエフ不変量は $n/3 \pmod 3$ がえられる．このようにして，式 (2) からすべての次数のヴァシリエフ不変量がえられるが，値は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ だけしかとりえない弱い不変量である．

以下の定理が知られている．

Theorem 4.9 ([18])**.** 任意のヴァシリエフ不変量はコンツェビッチ不変量から導かれる．

よって，ヴァシリエフ不変量を導くことができる結び目とカンドル（シャドー）コサイクル不変量に対してはコンツェビッチ不変量の方が普遍的であることがわかる．しかし，注意 4.7 の条件が必要であり，この条件を満たさない結び目またはカンドル（シャドー）コサイクル不変量が存在することがわかっている．よって，コンツェビッチ不変量が任意のアレクサンダーカンドルを用いたカンドル（シャドー）コサイクル不変量より普遍的であるというのは偽である．

参考文献

[1] S.Abe, *On finite type invariants of knots and 3-manifolds*, Thesis, Univ. of Saitama, (2016)

[2] ———, *Relationship between quandle shadow cocycle invariants and Vassiliev invariants of links*, arXiv:1812.11580.

[3] Alexander, James., *A lemma on a system of knotted curves.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **9** (1923) 93–95.

[4] Birman, J.S., Lin, X.-S., *Knot polynomial and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111**(1993) 225–270.

[5] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[6] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–386.

[7] M. N. Goussarov, *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, in Topology of manifolds and varieties, edited by O. Viro, Amer. Math. Soc., Providence (1994), 167-172.

[8] ———, *On n-equivalence of knots and invariants of finite degree*, in Topology of manifolds and varieties, edited by O. Viro, Amer. Math. Soc., Providence (1994), 173-192.

[9] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37–65.

[10] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math. vol. **761**, Springer-Verlag, 1979.

[11] M. Jimbo, Introduction to the Yang-Baxter equation. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, volume 9 of Adv. Ser. Math. Phys., pages 111–134. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[12] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, **vol. 155**, Springer–Verlag, New York, (1995).

[13] J. Mandemaker, *Various topics in rack and quandle homology*, master?fs thesis, available at http://www.cs.ru.nl/ mandemak/VariousTopicsInRackAndQuandleHomology.pdf.

[14] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330.

[15] ———, *The 3-cocycles of the Alexander quandles* $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005) 183–205.

[16] T. Nosaka, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 3413–3436.

[17] T. Ohtuki, Musubime no Fuhenryou (*Knot invariants*), in Japanese, Kyoritsu Shuppan, 2015.

[18] S. Piunikhin, *Weight of Feynman diagrams, link polynomials and Vassiliev knot invariants*, J. Knot Theory Ramifications **4** (1995) 163–188.

[19] Soloviev, A., *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, Math. Res. Lett. **7**(2000) 577–596.

[20] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, **vol. 18**, Walter de Gruyter and Co., Berlin, (1994).

[21] V.A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, "Theory of symmetries and its applications" (V.I. Arnold ed.) Adv. Soviet Math. **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1990) 23–69.