1 点抜き楕円曲線の同型類の幾何的基本群による復元

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
更科明 (Akira SARASHINA)

概要

1980 年代、Grothendieck により素体の有限次拡大体上の双曲的曲線の幾何が (ある意味で)étale 基本群から復元されるという予想が提唱された。この予想は中村博昭氏、玉川安騎男氏の部分的な結果を経て望月新一氏によって肯定的に解決された。本稿では正標数代数閉体上の曲線に対しても étale 基本群が多くの情報を持つ事、また特別な場合に元の曲線の同型類が復元できる事を紹介する。

1 導入

S を連結スキーム、Ω を代数閉体とする。射 $\overline{s}$: $\mathrm{Spec}(\Omega) \to S$ を幾何的点と呼ぶ。S と $\overline{s}$ から (étale) 基本群 $\pi_1(S;\overline{s})$ が定まる。$\pi_1(S;\overline{s})$ の同型類は $\overline{s}$ に寄らずに定まるため、同型類のみを問題にしている場合はしばしば $\overline{s}$ を省略して $\pi_1(S)$ と書く。また体 k が存在して $S \simeq \mathrm{Spec}(k)$ であるとき、$\pi_1(S)$ は k の絶対 Galois 群 G_k と同型である。

U を体 k 上の幾何的連結有限型スキームとする。幾何的点 $\overline{s}$: $\mathrm{Spec}(\Omega) \to U_{\overline{k}} = U \times_k \overline{k}$ を取り U と $\mathrm{Spec}(k)$ への像も同じ $\overline{s}$ で表す。このときスキームの射の列 $U_{\overline{k}} \to U \to \mathrm{Spec}(k)$ から以下の完全列が得られる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(U_{\overline{k}};\overline{s}) & \longrightarrow & \pi_1(U;\overline{s}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{Spec}(k);\overline{s}) & \longrightarrow & 1. \\
 & & & & & & \| & & \\
 & & & & & & G_k & &
\end{array}
$$

$\pi_1(U_{\overline{k}})$ を U の幾何的基本群と呼ぶ。

Grothendieck により U が遠アーベル多様体であるとき U の幾何は (ある意味で) 上記の完全列から復元されるという、今日では Grothendieck 予想とも呼ばれる予想が提唱された (c.f. [2], [3])。Grothendieck は遠アーベル多様体の定義を残していないためこの予想は厳密に定式化されたものではないが、一次元の場合は遠アーベルと双曲的が同値であると予想した。この曲線に対する予想は中村博昭氏、玉川安騎男氏の部分的な結果を経て望月新一氏によって肯定的に解決された。

定理 1.1 (Grothendieck conjecture for hyperbolic curves) ([4] Theorem A)
k を sub-p-adic field ($\mathbb{Q}_p$ 上の有限生成体の部分体)、U_1 と U_2 を k 上の双曲的曲線 (g を種数、n をカスプの数 $\#(U^{cpt} \backslash U)$ としたとき、$2g+n-2>0$ を満たす曲線) とする。$Isom_{G_k}(\pi_1(U_1), \pi_1(U_2)) = \{F \in Isom(\pi_1(U_1), \pi_1(U_2)) | Pr_{U_1} = Pr_{U_2} \circ F\}$ とおく。このとき以下の自然な写像は全単射で

ある。

$$Isom_{(k\text{-}sch)}(U_1, U_2) \to Isom_{G_k}(\pi_1(U_1), \pi_1(U_2))/Inn(\pi_1(U_2 \times_k \overline{k}))$$

■

この結果から特に数体上の二つの双曲的曲線 U_1 と U_2 の étale 基本群が同型であれば U_1 と U_2 が同型である事がわかる。

一方 U が標数 0 の代数閉体上の曲線であるとき G.A.G.A. の理論から以下の定理が得られる。

定理 1.2 ([1] XII)
k を標数 0 の代数閉体、U を k 上の曲線とする。$\Pi_{g,n}$ を以下の生成元と関係式で定義される群の副有限完備化とする。

$$< \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1 \cdots \gamma_n >$$

g を U の種数、n を U のカスプの数 $\#(U^{cpt}\backslash U)$ としたとき以下の同型が存在する。

$$\pi_1(U) \simeq \Pi_{g,n}$$

■

ここから U の étale 基本群 (幾何的基本群) の同型類は U のコンパクト化 U^{cpt} の種数 g と U^{cpt} から U を引いた点 (カスプ) の数 $n = \#(U^{cpt}\backslash U)$ のみで定まる事、g と n が異なっても基本群が同型になる場合がある事がわかる ($\Pi_{1,1} \simeq \Pi_{0,3}$)。このように標数が 0 の場合は幾何的基本群はあまり多くの情報を持っていない。次の節で正標数の場合は幾何的基本群が多くの情報を持っている事を述べる。

2 正標数代数閉体上の曲線の基本群

正標数代数閉体上の曲線の基本群に関しては玉川安騎男氏によって多くの結果が得られている。特に有限体の代数閉包上の曲線に対しては、ある副有限群の同型類に対して基本群がその同型類に含まれるような曲線の同型類が (特別な場合を除いて) 有限個である事 (c.f. [7])、以下で述べるように種数 0 の曲線に関しては基本群の同型類に対して曲線の同型類がただ一つ定まる事 (c.f [6]) が玉川安騎男氏によって示されている。筆者は上記の種数 0 の曲線に対する結果に関連した研究を行い $p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$ の場合にも同様の結果が得られる事を示した (c.f. [5])。

k_i $(i = 1, 2)$ を標数 $p_i > 0$ の代数閉体、U_i を k_i 上の曲線、g_i を U_i のコンパクト化 U_i^{cpt} の種数、S_i をカスプの集合 $U_i^{cpt}\backslash U_i$、n_i を S_i の濃度 $\#S_i$ とする。また $\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(U_2)$ と仮定する。

定理 2.1 ([6] Proposition 1.2, Theorem 1.9)

- $(g_1, n_1) = (g_2, n_2)$
- $(g_1, n_1) \neq (0, 0)$ (i.e. $U_1 \not\simeq \mathbb{P}^1$) $\Rightarrow p_1 = p_2$

■

定理 2.1 より標数 0 の場合と異なり正標数の場合は幾何的基本群から元の曲線の基本的な不変量か復元できる。また同型類の復元に関して、$g_1 = 0$ (i.e. $U_1^{cpt} \simeq \mathbb{P}^1$) であればカスプの配置のみが問題であり、$(g_1, n_1) = (1, 1)$ であればコンパクト化の j 不変量が復元できれば良いという事になる。この問題に取り組むにあたって以下の定理が基本的な道具になる。

定理 2.2 ([6] Theorem 2.5)
同型 $\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(U_2)$ に対して全単射 $S_1 \simeq S_2$ が自然に定まる。

■

これ以降 p_i, g_i, n_i (i=1, 2) を単に p, g, n と書く。

$g = 0$ とする。$n = 0$ のとき、基本群は自明なので標数 p_i を復元する事はできないが $U_i \simeq \mathbb{P}^1_{k_i}$ である事がわかる。$1 \leq n \leq 3$ のときは明らかなので $n \geq 4$ を仮定する。S_i の相異なる 2 点 $P_{i,0}, P_{i,\infty}$ を固定すると $P_{i,0}$ を 0 に $P_{i,\infty}$ を ∞ に移す単射 $S_i \hookrightarrow U_i^{cpt}(k) \simeq k \cup \{\infty\}$ が k のスカラー倍の差を除いて定まる。ここから k の加法が $U_i^{cpt}(k) \backslash \{P_{i,\infty}\}$ に誘導され、特に $S_i \backslash \{P_{i,\infty}\}$ の点の $\mathbb{F}_p$ 上の線形関係を定義する事ができる。この線形関係が基本群から復元される (定理 2.2 の全単射を通して片方で成り立てばもう片方で成り立つ) 事を示す事で組み合わせ論的に以下の定理が示される。

定理 2.3 ([6] Theorem 3.5)
$g = 0$、$n \neq 0$、$k_1 \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$ とする。このとき (k_2-スキームとしてではなく) スキームとしての同型 $U_1 \times_{k_1} k_2 \simeq U_2$ が存在する。

■

$p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$ とする。U_i^{cpt} を E_i、カスプを $\mathcal{O}_i$ と置く。$\mathcal{O}_i$ を基点とする楕円曲線の群構造から定まる m 倍射 $[m] : E_i \to E_i$ を用いて étale 被覆に上がる事でカスプの数を増やす事ができる (m が p で割れる場合は射を étale と純非分離に分解し étale 被覆をとる)。このとき被覆のカスプの集合 $E_1[m], E_2[m]$ の間にも自然な全単射が存在し、さらに群同型になる事が示せる ([5] Lemma 4.2)。次に E_i が Legendre form $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_i)$ で定義されているとする。このとき x 軸への射影 $x_i : E_i \to \mathbb{P}^1$ が存在し、特に $g = 0$ の場合と同様に $x_i(E_i[m])$ の点の $\mathbb{F}_p$ 上の線形関係が定義できる。ある場合にこの線形関係が基本群から復元される事を示し (c.f. [5] Corollary 4.8)、上記の群同型 $E_1[m] \simeq E_2[m]$ と組み合わせる事で E_1, E_2 の j 不変量が復元され、以下の定理が示される。

定理 2.4 ([5] Theorem 4.9)
$p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$、$k_1 \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$ とする。このとき (k_2-スキームとしてではなく) スキームとしての同型 $U_1 \times_{k_1} k_2 \simeq U_2$ が存在する。

■

参考文献

[1] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Vol. 1960/61 of *Séminaire de Géométrie Algébrique*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963.

[2] A. Grothendieck. Brief an G. Faltings. In *Geometric Galois actions, 1*, Vol. 242 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 49–58. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 285–293.

[3] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. In *Geometric Galois actions, 1*, Vol. 242 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 5–48. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 243–283.

[4] S. Mochizuki. The local pro-p anabelian geometry of curves. *Invent. Math.*, Vol. 138, No. 2, pp. 319–423, 1999.

[5] A. Sarashina. Reconstruction of one-punctured elliptic curves in positive characteristic by their geometric fundamental groups. *RIMS Preprint, No.1876*, 2017.

[6] A. Tamagawa. On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic > 0. *Internat. Math. Res. Notices*, No. 16, pp. 853–873, 1999.

[7] A. Tamagawa. Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 13, No. 4, pp. 675–724, 2004.