コヒーレント状態を用いた量子古典対応

大妻女子大学 社会情報学部
弓林　司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)

概要

本発表では、可積分場の理論に於ける量子古典対応に就いて、"場の理論に於ける coherent 状態" を構成し、議論する。場の理論に於ける coherent 状態とは、場の演算子に対する期待値が、古典 soliton（一般には任意の関数）に一致する状態のことである。特に、この状態に対する量子古典時間発展を定義し、量子効果、及び、非線型性に由来する不安定性を議論した。

1　導入

量子論の基礎が完成して以来、量子論と古典論の対応は如何様に与えられる可きかという事に就いて議論が続いて来た。量子論と古典論の対応を与える方法に就いては、Ehrenfest の定理、WKB 解析等が挙げられるだろう。特に、確率解釈に於いては、古典論的な物理量は期待値として現れるということも。従って、量子古典的対応に於ける本質的な問いは、正準変数（作用素）の期待値が古典論（的振る舞い）に対応する様な、「良い」量子状態を見つける問題へと還元される。

本発表では可積分場理論における量子古典対応について考察する。特に本発表では、最も単純で重要な例は、接触相互作用を持つ 1 次元 Bose 気体の Hamiltonian

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(-\partial_j^2\right) + \sum_{1\leq j<k\leq N} 2c\delta(x_j, x_k), \tag{1}$$

によって記述される。ここで、N は粒子数、c は結合定数、$\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ である。この系は量子可積分系である。即ち、厳密な固有状態と固有 enargy が、Bethe 仮設法によって与えられる [2]。この多体系を第二量子化し、場の理論として焼き直すと、場の演算子は量子非線形 Schrödinger（NLS）方程式に従い。更に、平均場近似を行う事で、場の演算子は、可換複素 scalar 場へ置き換えられる。こうして得られる、古典 NLS 方程式は、soliton 解を持ち古典可積分系であることが知られている [3]。この様に、量子可積分系であり、かつ、その古典極限が古典可積分系である様な系に対し、古典 soliton に対応する量子状態を同定する問題は、長らく論じられてきた $(c<0)$[4, 5]$(c>0)$[6, 7]。

本発表では「coherent 状態」[8] を用いた量子古典対応に就いて議論する。coherent 状態は正準変数の期待値が古典的な振る舞いを持つ量子状態である。例えば、調和振動子の場合、coherent 状態（の位置表示波動関数）は、局在波を形成し、その形を変えることなく、古典的な粒子と正確に同じ周波数で振動することが知られている [9]。

本発表では、場の理論に於ける coherent 状態を定義し、この状態の量子古典時間発展を定義、それらの間の差を調べる事で、coherent 状態が与える量子古典対応の安定性に就いて議論した。

本発表は東大先端研佐藤純氏との共同研究 [1] に基づく。

2 準備

2.1 量子場

まず量子場を準備する。

1 次元 Bose 気体を表す「場の作用素 $\psi(x,t)$」は以下の「同時刻交換関係」を満たす[*1] 。

$$[\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}^\dagger(y,t)]=\delta(x-y), \tag{2}$$
$$[\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}(y,t)]=[\hat{\psi}^\dagger(x,t),\hat{\psi}^\dagger(y,t)]=0. \tag{3}$$

「真空状態 $|\,0\,\rangle$」は以下を満たす。

$$\hat{\psi}(x,t)|\,0\,\rangle=0,\quad \langle\,0\,|\hat{\psi}^\dagger(x,t)=0,\qquad \langle 0|0\rangle=1. \tag{4}$$

「状態空間」は真空 $|\,0\,\rangle$ に「生成作用素 $\hat{\psi}^\dagger(x)$」を以下の様に作用する事で得られる。

$$|\varphi_N\rangle=\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\varphi_N(x_1,\cdots,x_N)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|\,0\,\rangle.$$

$\varphi_N(x_1,\cdots,x_N)$ は N 体波動関数に対応する。

上記の量子場作用素の Hamiltonian は、Hamiltonian (1) を「第 2 量子化」し、以下の様与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}}=\int \mathrm{d}x\left[-\hat{\psi}^\dagger\partial_x^2\hat{\psi}+c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}\right]. \tag{5}$$

Heisenberg 描像において、場の作用素 $\hat{\psi}(x,t)$ は以下の運動方程式に従う。

$$\mathrm{i}\partial_t\hat{\psi}=[\hat{\psi},\hat{\mathcal{H}}]=-\partial_x^2\hat{\psi}+2c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}, \tag{6}$$

これは「量子非線型 Schrödinger（NLS）方程式」と呼ばれる。この方程式の「形式解」は以下で与えられる。

$$\hat{\psi}(x,t)=e^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}\hat{\psi}(x)e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}. \tag{7}$$

[*1] $[A,B]=AB-BA.$

2.2　古典場

次に古典場を準備する。

量子場作用素 $\hat{\psi}(x,t)$ 及び $\hat{\psi}^\dagger(x,t)$ を、可換な複素 scalar 場（古典場）$f(x,t)$ 及び $f^*(x,t)$ に置き換えることを「古典化」と呼ぶことにする。

古典化に対し、量子 NLS 方程式 (6) は、以下の様に書き換えられる。

$$\mathrm{i}\partial_t f = -\partial_x^2 f + 2cf^* ff. \tag{8}$$

これは「古典 NSL 方程式」と呼ばれる。

「Energy 汎関数」は、Hamiltonian (5) を古典化し、以下で与えられる。

$$E[f,f^*] = \int \mathrm{d}x \left[-f^*\partial_x^2 f + cf^* f^* ff\right], \tag{9}$$

この Energy 汎関数から「Poisson 括弧」

$$\{F,G\} := \frac{1}{\mathrm{i}}\int \mathrm{d}x \left(\frac{\delta F}{\delta f}\frac{\delta G}{\delta f^*} - \frac{\delta G}{\delta f}\frac{\delta F}{\delta f^*}\right). \tag{10}$$

を用いて、古典 NLS 方程式 (8) は、

$$\partial_t f = \{f,E\}, \quad \partial_t f^* = \{f^*,E\}, \tag{11}$$

と書き換えられる。

特に、Poisson 括弧に対し、古典場 $f(x,t)$ 及び $f^*(x,t)$ は、「同時刻正準交換関係」

$$\{f(x,t), f^*(y,t)\} = \frac{1}{\mathrm{i}}\delta(x-y) \tag{12}$$

を満たす。

2.3　Coherent 状態

$f(x,t)$ を古典 NLS 方程式 (8) の soliton 解とする。ここでは初期時刻 $t=0$ で soliton 解に対応する量子状態を準備する。

この量子状態は、本発表の主対象である「場の理論に於ける coherent 状態 [10]」で、以下で定義される。

$$|f\rangle := e^A|\,0\,\rangle, \quad A := \int \mathrm{d}x \left[f(x)\hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x)\hat{\psi}(x)\right], \tag{13}$$

ここで $f(x) := f(x,t=0)$ とした。また、規格化を $\langle f|f\rangle = 1$ とし、$A^\dagger = -A$ を満たす。

Coherent 状態は、量子場作用素、古典場に対し、以下の関係式を満たす。

$$[\hat{\psi}(x), A] = f(x), \quad [\hat{\psi}^\dagger(x), A] = f^*(x), \tag{14}$$
$$\{f(x), A\} = \mathrm{i}\hat{\psi}(x), \quad \{f^*(x), A\} = \mathrm{i}\hat{\psi}^\dagger(x). \tag{15}$$

以上の定義、関係式より、この coherent 状態は量子場の作用素 $\hat{\psi}(x)$ の固有値 $f(x)$ に対応する固有 vector と成っている事が分かる。

$$\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x)|f\rangle. \tag{16}$$

更に、この期待値は、以下で与えられる。

$$\langle f|\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x), \quad \langle f|\hat{\psi}^\dagger(x)|f\rangle = f^*(x), \tag{17}$$

以上依り coherent 状態は量子場作用素 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ を古典場 f, f^* へ古典化する事が分かる。

2.4 量子古典時間発展

ここでは coherent 状態の時間発展に就いて議論する。量子論に於いて、coherent 状態 $|f\rangle$ の時間発展は、

$$|f, t\rangle := e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}|f\rangle = e^{A(-t)}|\,0\,\rangle, \tag{18}$$

で定義される。ここで

$$A(t) := \int \mathrm{d}x \left[f(x)\hat{\psi}^\dagger(x,t) - f^*(x)\hat{\psi}(x,t) \right]. \tag{19}$$

と置いた。この時、時刻 t に於ける量子場作用素に対する期待値は、

$$\langle f, t|\hat{\psi}(x)|f, t\rangle = \langle f|\hat{\psi}(x,t)|f\rangle, \tag{20}$$

を満たすが、これは $f(x,t)$ とは等しくない。

そこで、この「量子時間発展」に対し、coherent 状態の「古典時間発展」$|\widetilde{f,t}\rangle$ を以下で定義し、これらの間のズレを議論しよう。

$$|\widetilde{f,t}\rangle := e^{\widetilde{A}(t)}|\,0\,\rangle, \tag{21}$$
$$\widetilde{A}(t) := \int \mathrm{d}x \left[f(x,t)\hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x,t)\hat{\psi}(x) \right], \tag{22}$$

この状態の時刻 t に於ける期待値は

$$\langle\widetilde{f,t}|\hat{\psi}(x)|\widetilde{f,t}\rangle = f(x,t). \tag{23}$$

となり、$f(x,t)$ に完全に一致する。

これらの状態は初期時刻 $t = 0$ で等しい。

$$A(0) = \widetilde{A}(0) = A, \quad |f, t = 0\rangle = |\widetilde{f, t = 0}\rangle = |f\rangle. \tag{24}$$

これらの時間発展は関係式

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}[A, \hat{\mathcal{H}}], \quad \partial_t \widetilde{A}(t) = \{A, E\}. \tag{25}$$

に依り与えられる。

「coherent 状態の量子古典時間発展の差」を表す量 $r(t)$ を

$$r(t) := \langle f, t | \widetilde{f, t} \rangle = \langle\, 0\, | e^{-A(-t)} e^{\widetilde{A}(t)} |\, 0\, \rangle, \tag{26}$$

で定義すると、$t = 0$ で 1、そこから徐々に減退して行く。

これを微小時間 Δt で評価すると、

$$A(-\Delta t) = A - \Delta t \frac{1}{\mathrm{i}}[A, \hat{\mathcal{H}}] =: A - \Delta t F, \tag{27}$$

$$\widetilde{A}(\Delta t) = A + \Delta t \{A, E\} =: A + \Delta t G. \tag{28}$$

及び、Baker-Campbell-Hausdorff の公式に依り、

$$r(\Delta t) = 1 - \mathrm{i} c \Delta t \int |f|^4 \mathrm{d}x + c\, \mathcal{O}(\Delta t^2). \tag{29}$$

であることがわかる。これは 1 次の項が純虚数であるため $|r(\Delta t)|^2$ は 1 となる。即ち、coherent 状態は、微小時間の範囲、または、弱結合 $c << 1$ の範囲で「良い量子古典対応」を与える事が分かる。

参考文献

[1] J. Sato, and T. Yumibayashi, “Quantum-classical correspondence via coherent state in integrable field theory”, [arXiv: 1811.03186]

[2] E.H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963); E.H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).

[3] V.E. Zakharov, A. B. Shabat, Sov. Phys.-JETP **34**, 62 (1972).

[4] C. R. Nohl, Ann. Phys. **96**, 234 (1976);

[5] M. Wadati, A. Kuniba, T. Konishi, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 1710 (1985);

[6] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, Phys. Rev. Lett. **108**, 110401 (2012).

[7] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, T. Deguchi, New J. Phys. **18**, 075008 (2016).

[8] J.R. Klauder, Ann. Phys. (U.S.A.) (11) 123 (1960).
S. Schweber, J. math. Phys. (3) 831 (1962).

[9] R.J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[10] S. Aoyama, Y. Kodama, Progr. Theor. Phys. **56**, (6) 1970 (1976).