Mathai-Quillen formalism によるグラスマン多様体 $G(2, N)$ の Euler 標数の計算

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
今西 翔一郎 (Shoichiro IMANISHI)

概要

Mathai-Quillen formalism は有限次元ベクトル束の Euler 類の構成手法であり、無限次元の底空間が群作用の下での対称性を持つ場合へと拡張すれば、位相的場の理論へ応用できる事が知られている [Atiyah-Jeffrey,1990]. 本発表では、群作用のある有限次元多様体と同一視できるグラスマン多様体 $G(2, N)$ に対して、この手法を用いる事で Euler 標数が計算できる事を紹介する.

1 導入

Mathai-Quillen formalism[5] (MQ formalism) は、有限次元ベクトル束 $\pi : E \rightarrow X$ に対して、ファイバーに沿って Gaussian 的に急減少する Thom 類 (Gaussian shaped Thom form) を構成する手法である. この Thom 類はコホモロジー類としては通常の Thom 類と同じであるが、一般の切断 $s : X \rightarrow E$ によって引き戻した Euler 類を考える時に、その真価が発揮される. この MQ formalism によって得られる Euler 類は、コホモロジー類としては切断 s の取り方に依らないという性質を持ちながら、露わに書き下した時には s に依存する項が表れる、という性質を持っている. その為、Euler 標数の計算をする際に都合の良い s の選び方をする事ができ、曲率項の積分で Euler 標数を得る Gauss-Bonnet の定理のような計算や s の零点の公点数を数え上げる事で Euler 標数を得る Poincaré-Hopf の定理のような計算ができる. 実際、 S^2 のように局所座標を書き下す事が容易な有限次元多様体の場合には、MQ formalism で s の取り方を様々に変えても Euler 標数の計算ができる事が分かっている [3]. さらに、曲率形式のパフィアン等が定義できない無限次元のベクトル束に対しても、それらに頼らず切断 s のみを用いて Euler 類を構成する手法を与える、という利点もある. この利点を活かし、MQ formalism を位相的ゲージ場の理論のラグランジアン構成に用いたが、MQ formalism の Atiyah-Jeffrey 解釈 [1] である. [1] では、ゲージ場の理論へ応用を行う為に、ベクトル束の底空間が商多様体である場合へと拡張を行い、formalism に従ってラグランジアン構成を行った.

本発表では、MQ formalism の Atiyah-Jeffrey 解釈を有限次元商多様体の一例であるグラスマン多様体 $G(2, N)$ に対して用いる事で、その Euler 標数の計算が可能である事を紹介する. また、formalism を用いて構成した Euler 類と、普遍束の Chern 類を用いた代数幾何学的な Euler 類の計算との対応関係についても紹介する.

2 Mathai-Quillen formalism について

2.1 Mathai-Quillen formalism のアイデア

$\pi : E \rightarrow X$ を n 次元多様体 X 上の向き付け可能なランク $2m$ のベクトル束とする．零切断 $i : X \rightarrow E$ による E の Thom 類 $\Phi(E) \in H_{cv}^*(E)$ の引き戻し $i^*\Phi(E)$ は、 E の Euler 類 $e(E)$ を与える、という性質を持つ．

$$e(E) = i^*\Phi(E) \quad (1)$$

また、互いにホモトピックな写像同士はコホモロジー類の引き戻しを与えるという性質から、一般の切断 $s : X \rightarrow E$ による引き戻し写像に拡張する事もできる．

$$s^*\Phi(E) = e(E) \quad (2)$$

Thom 類 $\Phi(E)$ として E の接続 ∇ に依存する $\Phi_\nabla(E)$ を取る事ができれば、切断 $s : X \rightarrow E$ を用いて引き戻す事で、切断 s 及び接続 ∇ の両者に依存する Euler 類 $e_{s,\nabla}(E)$ を構成する事ができる．また、 $e_{s,\nabla}(E)$ は E の Euler 類であるから、底空間 X 上で積分する事で E の Euler 標数 $\chi(E)$ を得る事ができる．これが **Mathai-Quillen formalism** のアイデアである．

$$e_{s,\nabla}(E) = s^*\Phi_\nabla(E), \quad \chi(E) = \int_X e_{s,\nabla}(E) \quad (3)$$

また、Mathai-Quillen formalism は、Thom 類の引き戻しに用いる切断 $s : X \rightarrow E$ として特定のものを選ぶ事で、よく知られた Gauss-Bonnet の定理及び Poincaré-Hopf の定理に帰着する、という性質を持つ．

2.2 Mathai-Quillen の Euler 類 $e_{s,\nabla}(E)$

∇, Ω_∇ を各々 E の接続及び曲率とする．この時、Chern-Weil 理論の結果から E の Euler 類 $e_\nabla(E)$ 、すなわち E のトップ Chern 類は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} e_\nabla(E) &= (2\pi)^{-m} \text{Pf}(\Omega_\nabla) \\ &= (2\pi)^{-m} \int \mathcal{D}\chi \exp\left(\frac{1}{2} \chi \Omega_\nabla \chi\right) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、2行目の等式はグラスマン変数 χ の積分による表記を用いた．尚、グラスマン変数 χ の積分 $\int \mathcal{D}\chi$ は、被積分関数を展開し、グラスマン変数に関してトップの次数である $\chi^1 \wedge \dots \wedge \chi^{2m}$ の係数を取り出す、という意味を持つ．Mathai-Quillen formalism はこの被積分関数をヒントに、 $e_{s,\nabla}(E)$ の構成を行っている．

π による E から E 自身への引き戻し π^*E を考える．普遍束 (tautological bundle) $\pi^*E \rightarrow E$ は各点 $\xi \in E$ において自然なファイバー ξ を持つ．この時、Mathai-Quillen の Thom 類 Φ_∇ は、以下の経路積分で与えられる．

$$\Phi_\nabla(E) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}H \exp\left(-\frac{1}{2} \|H - i\xi\|^2 - \frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{1}{2} \chi \Omega_\nabla \chi + i^t(\nabla\xi)\chi\right) \quad (5)$$

ただし, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m} : E$ のファイバー座標, $\chi = (\chi^1, \dots, \chi^{2m}) : \text{グラスマン変数}$, $H = (H^1, \dots, H^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ であり, ∇, Ω_∇ は各々 π^*E 上に引き戻された E の接続及び曲率とした. また $\|\xi\|^2 = \|\xi\|^2$ とし, ξ の共変外微分を $\nabla\xi$ と表記した.

ここで, 以下のような次数付き演算子 δ による変換 δ を用意する.

$$\delta\xi^a = \nabla\xi^a, \quad \delta\chi^a = H^a, \quad \delta H^a = \Omega_\nabla^{ab}\chi_b \quad (6)$$

$\Phi_\nabla(E)$ 中の指数の冪は δ 変換を用いる事で以下のように表す事もできる. (すなわち, TQFT の作用汎関数として見る事ができる.)

$$-\delta\Psi := -\delta\left\langle\chi, \frac{H}{2} - i\xi\right\rangle = -\frac{1}{2}\|H - i\xi\|^2 - \frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{1}{2}\chi\Omega_\nabla\chi + i^t(\nabla\xi)\chi \quad (7)$$

ただし, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ は通常の Euclid 内積を表す. $e_{s,\nabla}(E) = s^*\Phi_\nabla(E)$ は, $\Phi_\nabla(E)$ 中の変数 ξ を $s(x)$, ($x \in X$) で置き換えることで得られる.

$$e_{s,\nabla}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}H \exp\left(-\delta\left\langle\chi, \frac{H}{2} - is(x)\right\rangle\right) \quad (8)$$

さらに, $e_{s,\nabla}(E)$ は E の Euler 類であるから, 底空間 X 上で積分する事で X の Euler 標数 $\chi(X)$ が得られる.

$$\chi(X) = \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi e_{s,\nabla}(E) \quad (9)$$

ただし, $x = (x^1, \dots, x^{2m}) : X$ 上の座標, $\psi(= \delta x) = (\psi^1, \dots, \psi^{2m}) : \text{グラスマン変数}$ である.

2.3 Gauss-Bonnet の定理/Poincaré-Hopf の定理との対応

この節では, (8) で得られた Mathai-Quillen の Euler 類 $e_{s,\nabla}$ において, 特別な s の選び方をする事で Gauss-Bonnet の定理及び Poincaré-Hopf の定理が再現される事を示す.

ベクトル束が接束の場合 ($E = TX$) について, 具体計算を行う事で二つの定理が再現される事を示す. X をリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ が入った $2m$ 次元リーマン多様体とする. 都合上, 切断 s を実数パラメータ $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いたベクトル場 $\gamma V : X \rightarrow TX$ と表記する事にする.

$$\chi_\gamma(X) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \mathcal{D}H \exp\left(-\delta\left\langle\chi, \frac{H}{2} - i\gamma V(x)\right\rangle\right) \quad (10)$$

また δ 変換は, 共変外微分を ∇ , リーマン曲率を $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$, クリストッフエル記号を $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ と表記すると, 以下のように書く事ができる.

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \psi^\mu, & \delta\psi^\mu &= 0, & \delta V^\mu &= \nabla V^\mu = (\partial_\nu V^\mu + V^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu) \psi^\nu, \\ \delta\chi^\mu &= H^\mu, & \delta H^\mu &= R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \chi^\rho \psi^\sigma \chi^\nu \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, $x = (x^1, \dots, x^{2m}) : X$ 上の座標, $\psi(= \delta x) = (\psi^1, \dots, \psi^{2m}) : \text{グラスマン変数}$, $\chi = (\chi^1, \dots, \chi^{2m}) : \text{グラスマン変数}$, $H = (H^1, \dots, H^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ である. この δ 変換の下で分配関数 $\chi_\gamma(X)$ の指数の冪を書き下すと, 以下を得る.

$$\delta\left\langle\chi, \frac{H}{2} - i\gamma V(x)\right\rangle = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (H^\mu - i\gamma V^\mu) (H^\nu - i\gamma V^\nu)$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2} g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - i\gamma \nabla_\nu V^\mu \psi^\nu \chi_\mu - \frac{1}{4} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \chi_\rho \chi_\sigma \psi^\mu \psi^\nu \quad (12)$$

補助場 H の経路積分はガウス積分として実行でき、Euler 標数 $\chi_\gamma(X)$ の表示は以下のように変わる。

$$\chi_\gamma(X) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + i\gamma \nabla_\nu V^\mu \psi^\nu \chi_\mu + \frac{1}{4} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \chi_\rho \chi_\sigma \psi^\mu \psi^\nu \right) \quad (13)$$

まず、 $\gamma = 0$ と取った時の Euler 標数の表示 $\chi_{\gamma=0}(X)$ を考える。

$$\chi_{\gamma=0}(X) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \exp \left(\frac{1}{4} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \chi_\rho \chi_\sigma \psi^\mu \psi^\nu \right) \quad (14)$$

経路積分を実行すると、以下の関係式を得る。

$$\chi_{\gamma=0}(X) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X \text{Pf}(R) = \int_X e(X) = \chi(X) \quad (15)$$

これはまさに、Euler 類 $e(X)(= e(TX))$ を X 上で積分する事で Euler 標数 $\chi(X)$ を得るという、Gauss-Bonnet の定理を再現している。

次に、 $\gamma \rightarrow \infty$ の極限における Euler 標数の表示 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X)$ を考える。都合上、ベクトル場 V は孤立零点 p_k (すなわち、 $V^\mu(p_k) = 0$ が成り立つ) を持つものを取ることにする。この時、経路積分に鞍点が存在するから、 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X)$ は鞍点 p_k に関する和で表す事ができ、各鞍点に関して摂動的に展開する事ができる。 x^μ を p_k の近傍における座標とし、 V^μ を p_k の近傍で展開する。

$$V^\mu(x) = \sum_{n=1}^{2m} \frac{1}{n!} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} V^\mu(p_k) x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} \quad (16)$$

ここで、以下のように変数のリスケールを行う。

$$x \rightarrow \gamma^{-1} x, \quad \psi \rightarrow \gamma^{-1/2} \psi, \quad \chi \rightarrow \gamma^{-1/2} \chi \quad (17)$$

この操作により、 $\gamma \rightarrow \infty$ 極限で x, ψ, χ を含む高次の項は減衰する為、経路積分はガウス積分に変わる。これらの項を落とすと、分配関数 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X)$ は以下のように書き直す事ができる。

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X) = \sum_{p_k} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \exp \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} H_\alpha^{(k)\mu} H_\beta^{(k)\nu} x^\alpha x^\beta + i H_\mu^{(k)\nu} \chi_\nu \psi^\mu \right) \quad (18)$$

ただし、以下のように Hesse 行列を H と表記した。

$$H_\sigma^{(k)\mu} = \partial_\sigma V^\mu|_{p_k} \quad (19)$$

また、この分配関数 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X)$ の各項の積分は、ガウス積分またはフェルミオン積分として実行する事ができる。

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_\gamma(X) &= \sum_{p_k} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \frac{1}{(2m)!} \left(i H_\mu^{(k)\nu} \chi_\nu \psi^\mu \right)^{2m} \exp \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} H_\alpha^{(k)\mu} H_\beta^{(k)\nu} x^\alpha x^\beta \right) \\ &= \sum_{p_k} \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{\sigma' \in S_{2m}} \text{sgn}(\sigma) H_{\sigma(1)}^{(k)1} \dots H_{\sigma(2m)}^{(k)2m} \int_X \exp \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} H_\alpha^{(k)\mu} H_\beta^{(k)\nu} x^\alpha x^\beta \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p_k} \frac{\det(H^{(k)})}{|\det(H^{(k)})|} = \chi(X) \quad (20)$$

最終行に着目すれば、ベクトル場 V の零点に対して交点数を数え上げる事で Euler 標数 $\chi(X)$ を得るという、Poincaré-Hopf の定理を再現している事が分かる。

3 Atiyah-Jeffrey 解釈

この節では、Atiyah-Jeffrey 解釈と呼ばれる、対象とするベクトル束の底空間がある Lie 群の作用の下で対称性を持つ場合の Mathai-Quillen formalism について述べる。

ゲージ群を G とする。Mathai-Quillen formalism で扱うベクトル束 $\pi: E \rightarrow X$ を $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ と置く。ただし、 $\mathcal{A}$ は切断 $s: \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$ の零点である場が成す多様体 $\mathcal{A} = \{s^{-1}(0)\}$ であり、 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ の場に対するゲージ変換群である。底空間にゲージ対称性がある場合には、超対称変換 δ は冪零ではなく、ゲージ変換の作用による変換分が残る。

$$\delta^2 = \delta_\phi \quad (21)$$

ただし、 δ_ϕ はゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の変換パラメータ ϕ による無限小ゲージ変換作用素を表すとする。

この性質を反映し、ラグランジアン中の各々の場に対する δ 変換は以下のように置き換わる。

$$\delta x = \psi, \quad \delta \psi = \delta_\phi x, \quad \delta \chi = H, \quad \delta H = \delta_\phi \chi, \quad \delta \phi = 0 \quad (22)$$

ただし、 $\phi: \mathcal{G}$ の変換パラメータ、 $x: \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の座標、 $\psi: \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上のフェルミオン座標 (グラスマン変数)、 $\chi: \mathcal{E}$ のファイバー上のフェルミオン座標、 $H: \mathbb{R}^{2m}$ 上の座標とした。

一般の Mathai-Quillen formalism の場合に、Euler 標数 $\chi(X)$ はベクトル束 $E \rightarrow X$ の Euler 類 $e_{s, \nabla}(E)$ を底空間 X 上で積分する事で得られていた。この節の設定では、 $e_{s, \nabla}(\mathcal{E})$ の底空間 $X = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上での積分に置き換えて実行する事で、Euler 標数 $\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ が得られる。また商空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上での積分は、被積分関数にゲージ水平方向への射影演算子 $\exp(-\delta\Psi_{\text{proj}})$ ($\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ の射影演算子) を掛ける事で、 $\mathcal{A}$ 上の積分として実行できる。

$$\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} e_{s, \nabla}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{A}} \exp(-\delta(\Psi + \Psi_{\text{proj}})) \quad (23)$$

以下で、 Ψ_{proj} を構成する。多様体 X 上の G -主束 $P \rightarrow X$ を考えると各点 $p \in P$ において、群 G の作用が与えられている。この時、 C を P の各点 $p \in P$ 上の群作用の微分 $C: \mathfrak{g} \rightarrow T_p P$ として定義する。ただし、 $\mathfrak{g}$ は G の Lie 代数 $\text{Lie}(G)$ とする。 θ をゲージ変換のパラメータとすると、 $C\theta$ は以下のように書くことができる。

$$C\theta = \delta_\theta x \quad (24)$$

また、 $C^\dagger$ を C の随伴作用素として定義しておく。

$$\langle C^\dagger \psi, \theta \rangle = \langle \psi, C\theta \rangle \quad (25)$$

この時、 $C^\dagger$ の核 $\text{Ker} C^\dagger \subset \mathcal{A}$ はゲージ変換と直交する水平方向である。実際に任意元 $\psi \in \text{Ker} C^\dagger$ に対して、以下の性質が成り立つ。

$$C^\dagger \psi = 0 \iff 0 = \langle C^\dagger \psi, \theta \rangle = \langle \psi, C\theta \rangle = \langle \psi, \delta_\theta x \rangle \quad (26)$$

この性質を用いて Ψ_{proj} を作る. すなわち, 経路積分を $\text{Ker}C^\dagger$ に制限するものが欲しい射影演算子 $\exp(-\delta\Psi_{\text{proj}})$ である. Ψ_{proj} を構成する為に, ボソン場 $\bar{\phi}$ とフェルミオン場 η を導入する. また, これらに対する δ 変換は以下のように定義する.

$$\delta\bar{\phi} = \eta, \quad \delta\eta = \delta_\phi\bar{\phi} \quad (27)$$

ただし, ϕ はゲージ変換パラメータである. これらの場を用いて Ψ_{proj} を以下のように置けば良い.

$$\Psi_{\text{proj}} := \langle \psi, C\bar{\phi} \rangle \quad (28)$$

演算子 $\exp(-\delta\Psi_{\text{proj}})$ が, ゲージ水平方向への射影演算子 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ の働きをする事を確認しておく. $\delta\Psi_{\text{proj}}$ の η 変分計算から, 以下が得られる.

$$\frac{\delta}{\delta\eta}\delta\Psi_{\text{proj}} = 0 \iff C^\dagger\psi = 0 \quad (29)$$

ゆえに, 演算子 $\exp(-\delta\Psi_{\text{proj}})$ を掛けておく事で, 経路積分をゲージ水平方向の部分空間である $\text{Ker}C^\dagger$ に射影する事ができる.

ここまでの内容を要約しておく, ゲージ対称性を持つ多様体 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の Euler 標数 $\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ は Mathai-Quillen formalism を用いる事で, 以下のように TQFT の分配関数と見る事ができる.

Mathai-Quillen formalism による Euler 標数の表式

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{A}/\mathcal{G}) &= \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \mathcal{D}H \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\eta \exp(-\mathcal{L}_{MQ}), \\ \mathcal{L}_{MQ} &= \delta \left\langle \chi, \frac{H}{2} - is \right\rangle + \delta \langle \psi, C\bar{\phi} \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

δ 変換

$$\begin{aligned} \delta x &= \psi, & \delta\psi &= \delta_\phi x, & \delta\chi &= H, & \delta H &= \delta_\phi \chi, \\ \delta\phi &= 0, & \delta\bar{\phi} &= \eta, & \delta\eta &= \delta_\phi\bar{\phi}, & \delta s &= \nabla s \end{aligned} \quad (31)$$

4 Mathai-Quillen formalism による $G(2, N)$ の Euler 標数の計算

4.1 $G(2, N)$ の Mathai-Quillen ラグランジアン

底空間にゲージ対称性 (Lie 群の作用の下での対称性) がある場合の Mathai-Quillen formalism (Atiyah-Jeffrey 解釈) を用いて, グラスマン多様体 $G(2, N)$ の Euler 標数 $\chi(G(2, N)) (= \binom{N}{2})$ を計算する. Mathai-Quillen formalism の枠組みで扱う為, $G(2, N)$ を同相な商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ と同一視する.

$$\begin{aligned} G(2, N) &\simeq V_2(\mathbb{C}^N)/U(2) = \mu^{-1}(0)/U(2), \\ \mu &= (\mu^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}, \quad \mu^{ij} = \sum_{s=1}^N \bar{z}_s^i z_s^j - r^2 \delta^{ij} \equiv (z^i, z^j) - r^2 \delta^{ij} \end{aligned} \quad (32)$$

ただし, $(\cdot, \cdot)$ はエルミート内積を意味する. $V_2(\mathbb{C}^N) = \{\mu^{-1}(0)\}$ は Stiefel 多様体と呼ばれる.

Euler 標数は位相不変量であるから $\chi(G(2, N)) = \chi(V_2(\mathbb{C}^N)/U(2))$ であり, 結局ゲージ対称性のある場合の Mathai-Quillen formalism を商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ 上の接束 $T(V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)) \rightarrow V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ に対して考える事で, $\chi(G(2, N))$ が得られる. Mathai-Quillen のラグランジアン (30) を書き下す為には, δ 変換を具体的に構成する必要がある.

Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{C}^N) \subset \mathbb{C}^{2N}$ 上の点 z の近傍における局所座標を以下のように表記する.

$$z := (z^1, z^2) = \left(\begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ \vdots \\ z_N^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ \vdots \\ z_N^2 \end{pmatrix} \right) \in V_2(\mathbb{C}^N) \subset \mathbb{C}^{2N} \quad (33)$$

また, $U(2)$ 変換 U はエルミート行列 $\phi \in M_2(\mathbb{C})$ を用いて次のように表す事ができる.

$$z \mapsto Uz, \quad U = e^{i\phi}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 + i\phi_3 \\ \phi_2 - i\phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} \quad (34)$$

この変換式から, 変換パラメータ ϕ による無限小ゲージ変換を以下のように得る.

$$\begin{cases} \delta_\phi z_s^1 = i\phi_1 z_s^1 + (i\phi_2 - \phi_3) z_s^2, \\ \delta_\phi z_s^2 = (i\phi_2 + \phi_3) z_s^1 + i\phi_4 z_s^2 \end{cases} \quad (s = 1, \dots, N) \quad (35)$$

計算の都合上, $z_s^1 =: x_s^1 + ix_s^2, z_s^2 =: x_s^3 + ix_s^4$ と局所座標 $(x_s^1, x_s^2, x_s^3, x_s^4) \in \mathbb{R}^4$ を用いて置き直し, 実表示に直しておく.

$$\begin{cases} \delta_\phi x_s^1 = -\phi_1 x_s^2 - \phi_3 x_s^3 - \phi_2 x_s^4, \\ \delta_\phi x_s^2 = +\phi_1 x_s^1 + \phi_2 x_s^3 - \phi_3 x_s^4, \\ \delta_\phi x_s^3 = +\phi_3 x_s^1 - \phi_2 x_s^2 - \phi_4 x_s^4, \\ \delta_\phi x_s^4 = +\phi_2 x_s^1 + \phi_3 x_s^2 + \phi_4 x_s^3 \end{cases} \quad (s = 1, \dots, N) \quad (36)$$

得られた無限小変換 δ_ϕ を用いる事で, 以下のように各場に対する δ 変換を得る.

δ 変換

$$\begin{aligned} \delta x &= \psi, & \delta \psi &= \delta_\phi x, & \delta \chi &= H, & \delta H &= (iI_{2N} + \delta_\phi)\chi, \\ \delta \bar{\phi} &= 0, & \delta \bar{\phi} &= \eta, & \delta \eta &= -i[\phi, \bar{\phi}] \end{aligned} \quad (37)$$

ただし, $H, \bar{\phi}$ はボソン場, ψ, χ, η はフェルミオン場であり, 各々以下のように表記している.

$$\begin{aligned} x &\equiv (x_s^i)_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq s \leq N}, & \psi &\equiv (\psi_s^i)_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq s \leq N}, \\ \bar{\phi} &\equiv \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 & \bar{\phi}_2 + i\bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_2 - i\bar{\phi}_3 & \bar{\phi}_4 \end{pmatrix}, & \eta &\equiv \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 + i\eta_3 \\ \eta_2 - i\eta_3 & \eta_4 \end{pmatrix} \\ \chi &\equiv \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} {}^t(\chi_1^1 & \chi_2^1 & \dots & \chi_N^1) \\ {}^t(\chi_1^2 & \chi_2^2 & \dots & \chi_N^2) \end{pmatrix}, & H &\equiv \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} {}^t(H_1^1 & H_2^1 & \dots & H_N^1) \\ {}^t(H_1^2 & H_2^2 & \dots & H_N^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

これらを用いて, $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2) (= G(2, N))$ に対する Mathai-Quillen のラグランジアンを書き下すと以下ようになる.

$$\mathcal{L}_{MQ} = \delta \left\langle \chi, \frac{H}{2} - is \right\rangle + \delta \langle \psi, C\bar{\phi} \rangle$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow -i\langle H, V \rangle + i\langle \chi, \delta V \rangle + \frac{1}{2}\langle H, H \rangle - \frac{i}{2}\langle \chi, (I_{2N} + \phi)\chi \rangle \\
& + r^2\phi_1\bar{\phi}_1 + 2r^2\phi_2\bar{\phi}_2 + 2r^2\phi_3\bar{\phi}_3 + r^2\phi_4\bar{\phi}_4 \\
& + ((x^2, \psi^1) - (x^1, \psi^2))\eta_1 + ((x^4, \psi^1) - (x^3, \psi^2) + (x^2, \psi^3) - (x^1, \psi^4))\eta_2 \\
& + ((x^3, \psi^1) + (x^4, \psi^2) - (x^1, \psi^3) - (x^2, \psi^4))\eta_3 + ((x^4, \psi^3) - (x^3, \psi^4))\eta_4 \\
& + 2(\psi^1, \psi^2)\bar{\phi}_1 + 2((\psi^1, \psi^4) - (\psi^2, \psi^3))\bar{\phi}_2 + 2((\psi^1, \psi^3) + (\psi^2, \psi^4))\bar{\phi}_3 + 2(\psi^3, \psi^4)\bar{\phi}_4
\end{aligned} \tag{39}$$

ここで、以下のようなゲージ場 A とフェルミオン場 ψ_A を導入する.

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad \psi_A \equiv \begin{pmatrix} \psi_A^1 & \psi_A^2 \\ \psi_A^3 & \psi_A^4 \end{pmatrix} \tag{40}$$

これらの場は δ 変換の下で以下のように変換されるとする.

$$\delta A = \psi_A, \quad \delta\psi_A = \delta_\phi A = A + [\phi, A] \tag{41}$$

$\delta^2 = \delta_\phi$ であり、商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ 上では冪零の性質を満たすから、ラグランジアンに $\delta^2(-)$ の形の項を加えても、分配関数（すなわち、Euler 標数 $\chi(X)$ の積分表示）は不変に保たれる。都合上、以下の項をラグランジアンに加えておく。

$$\delta^2 \left(\frac{1}{4} \text{tr}(A^\dagger A) \right) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^\dagger A + A^\dagger[\phi, A]) \tag{42}$$

ゆえに、 $G(2, N)$ の Mathai-Quillen のラグランジアン $\mathcal{L}_{G(2, N)}$ は以下で得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{G(2, N)} &= -i\langle H, V \rangle + i\langle \chi, \delta V \rangle + \frac{1}{2}\langle H, H \rangle - \frac{i}{2}\langle \chi, (I_{2N} + \phi)\chi \rangle \\
& + r^2\phi_1\bar{\phi}_1 + 2r^2\phi_2\bar{\phi}_2 + 2r^2\phi_3\bar{\phi}_3 + r^2\phi_4\bar{\phi}_4 \\
& + ((x^2, \psi^1) - (x^1, \psi^2))\eta_1 + ((x^4, \psi^1) - (x^3, \psi^2) + (x^2, \psi^3) - (x^1, \psi^4))\eta_2 \\
& + ((x^3, \psi^1) + (x^4, \psi^2) - (x^1, \psi^3) - (x^2, \psi^4))\eta_3 + ((x^4, \psi^3) - (x^3, \psi^4))\eta_4 \\
& + 2(\psi^1, \psi^2)\bar{\phi}_1 + 2((\psi^1, \psi^4) - (\psi^2, \psi^3))\bar{\phi}_2 + 2((\psi^1, \psi^3) + (\psi^2, \psi^4))\bar{\phi}_3 + 2(\psi^3, \psi^4)\bar{\phi}_4 \\
& + \frac{1}{2} \text{tr}(A^\dagger A + A^\dagger[\phi, A])
\end{aligned} \tag{43}$$

4.2 Euler 標数の計算

Euler 標数 $\chi(X)$ はベクトル場 V の取り方に依らない為、 $V(x) = 0, (\forall x \in V_2(\mathbb{C}))$ を満たすベクトル場を用いる。Mathai-Quillen formalism によれば、Euler 標数 $\chi(G(2, N))$ は以下のようなラグランジアン (43) の経路積分で得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{(2\pi)^{4N+8} r^4} \int_{V_2(\mathbb{C}^N)} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\chi \mathcal{D}H \mathcal{D}A \\
& \times ((x^1, \psi^1) + (x^2, \psi^2)) ((x^4, \psi^1) - (x^3, \psi^2) - (x^2, \psi^3) + (x^1, \psi^4)) \\
& \times ((x^3, \psi^1) + (x^4, \psi^2) + (x^1, \psi^3) + (x^2, \psi^4)) ((x^3, \psi^3) + (x^4, \psi^4)) \\
& \times \exp(-\mathcal{L}_{G(2, N)}|_{V=0})
\end{aligned} \tag{44}$$

ただし、被積分関数に接空間 $T_x V_2(\mathbb{C}^N)$ への射影子を掛けている。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r} ((x^1, \psi^1) + (x^2, \psi^2)), \quad \frac{1}{r} ((x^4, \psi^1) - (x^3, \psi^2) - (x^2, \psi^3) + (x^1, \psi^4)), \\ & \frac{1}{r} ((x^3, \psi^1) + (x^4, \psi^2) + (x^1, \psi^3) + (x^2, \psi^4)), \quad \frac{2}{r} ((x^3, \psi^3) + (x^4, \psi^4)) \end{aligned} \quad (45)$$

(44) の経路積分を $\bar{\phi}, \chi, \eta, H, A$ に関して実行する事で、以下を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4(2\pi)^{2N} r^4} \int_{V_2(\mathbb{C}^N)} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \psi_1^1 \psi_2^1 \psi_1^2 \psi_2^2 \psi_1^3 \psi_2^3 \psi_1^4 \psi_2^4 \\ & \times \delta \left(\phi_1 + \frac{2}{r^2} (\psi^1, \psi^2) \right) \delta \left(\phi_2 + \frac{1}{r^2} ((\psi^1, \psi^4) - (\psi^2, \psi^3)) \right) \\ & \times \delta \left(\phi_3 + \frac{1}{r^2} ((\psi^1, \psi^3) + (\psi^2, \psi^4)) \right) \delta \left(\phi_4 + \frac{2}{r^2} (\psi^3, \psi^4) \right) \\ & \times \frac{(1 + \text{tr}(\phi) + \det(\phi))^N}{1 - \text{tr}(\phi) + 4 \det(\phi)} \\ & \equiv \left\langle \frac{(1 + \text{tr}(\phi) + \det(\phi))^N}{1 - \text{tr}(\phi) + 4 \det(\phi)} \right\rangle \end{aligned} \quad (46)$$

$\langle \det(\phi)^{N-2} \rangle = 1$ という規格化条件を課す事で、(46) から Euler 標数 $\chi(G(2, N))$ を得る事ができる。

$$\left\langle \frac{(1 + \text{tr}(\phi) + \det(\phi))^N}{1 - \text{tr}(\phi) + 4 \det(\phi)} \right\rangle = \binom{N}{2} = \chi(G(2, N)) \quad (47)$$

5 $G(2, N)$ の Chern 類との対応

得られた Euler 類が、普遍束の Chern 類を用いた通常の計算と対応している事を確認しておく。

$G(2, N)$ 上の普遍束 (tautological bundle) を S とすると、接束 $TG(2, N)$ に対して $TG(2, N) = (S^*)^{\oplus N} / (S^* \otimes S)$ が成立する。(S^* は S の双対束を表す。) 全 Chern 類を $c_t(\cdot) = 1 + tc_1(\cdot) + t^2 c_2(\cdot) + \dots$ と表すとする。 Euler 類はトップ Chern 類によって得られるから、以下の関係式が成立する。

$$e(TG(2, N)) = c_t(TG(2, N))|_{\text{top}} = \frac{c_t(S^*)^N}{c_t(S^* \otimes S)} \Big|_{\text{top}} \quad (48)$$

$c_t(S^*) =: (1 + tx)(1 + ty)$ と置くと、 $e(TG(2, N))$ は以下のように書き下す事ができる。

$$e(TG(2, N)) = \frac{(1 + tx)^N (1 + ty)^N}{1 - t^2(x - y)^2} \Big|_{t^{2N-4}} \quad (49)$$

$t(x + y) \leftrightarrow \text{tr}(\phi)$, $t^2 xy \leftrightarrow \det(\phi)$ と対応させる事で、得られた Euler 類 (46) が確かに Chern 類による計算と対応する事が分かる。

$$\frac{(1 + tx)^N (1 + ty)^N}{1 - t^2(x - y)^2} = \frac{(1 + t(x + y) + t^2 xy)^N}{1 - t(x + y)^2 + 4t^2 xy} \leftrightarrow \frac{(1 + \text{tr}(\phi) + \det(\phi))^N}{1 - \text{tr}(\phi) + 4 \det(\phi)} \quad (50)$$

参考文献

- [1] M. F. Atiyah and L. Jeffrey, Topological Lagrangians and cohomology, *J. Geom. Phys.*, **7**, 119-136 (1990).
- [2] M. Blau, The Mathai-Quillen formalism and topological field theory, *J. Geom. Phys.*, **11**, 95-127 (1993).
- [3] J. M. F. Labastida, Lectures on Topological Quantum Field Theory, hep-th/9709192.
- [4] M. Marino, Topological Lagrangians and cohomology, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 463001 (2011).
- [5] V. Mathai and D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, *Topology*, **25**, 85-110 (1986).
- [6] M. Nakahara, Geometry, topology and physics, (2nd ed., Institute of Physics Publishing, 2003).
- [7] 佐古 彰史, 超対称ゲージ理論と幾何学-非摂動的アプローチ, (第1版, 日本評論社, 2007).
- [8] E. Witten, The Verlinde Algebra And The Cohomology Of The Grassmannian, *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 357-422 (1995).