

フーリエ級数の収束問題に関するフェイエールの定理 の拡張可能性について

今川和人 (Kazuto Imagawa)

金沢大学大学院 自然科学研究科 機械科学専攻

1. 緒論

本論文では、フーリエ級数の基礎を学び、フェイエールの定理の拡張可能性について考察することを主目的とする。関数が十分滑らかであれば、そのフーリエ級数は収束し、元の関数に一致することが容易に確かめられるが、関数が連続というだけの条件下におけるフーリエ級数の収束問題は、長い間未解決であり、1876年にデュボアレイモンが1点でフーリエ級数が発散するような連続関数を具体的に構成したことは、フーリエ級数の収束問題が複雑怪奇であることを意味することとなった。他方、フーリエ級数の総和の意味を、級数の相加平均を用いて定義されるチェザロ総和法と呼ばれる総和法に置き換えてフーリエ級数の収束問題を捉えなおすことにより、すべての連続関数に対してチェザロの意味においてフーリエ級数は収束することが知られている。この総和法の代替により、連続関数のフーリエ級数の収束可能性を保証するものがフェイエールの定理である。しかし、一口に総和法と言っても、種々の総和法が知られており、これらの総和法を復習し、比較することにより、上述のフェイエールの定理の最適性を再検証することがこの論文の主題である。

2. フェイエールの定理

2.1 フーリエ級数

f が $[-\pi, \pi]$ 上の可積分関数のとき、 f の第 n フーリエ係数は

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

で定義され、 f のフーリエ級数は形式的に

$$f(\theta) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

と書ける。また、 $N = 0, 1, 2, \dots$ に対し、

$$S_N[f](\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

とおき、これを f の第 N 部分和という。フーリエ級数が通常の意味で収束するとは、 $N \rightarrow \infty$ のとき、この第 N 部分和 $S_N[f]$ が f に $[-\pi, \pi]$ 上の各点で収束することを意味する。

2.2 ディリクレ核

2つの関数の畳み込みを用いて、フーリエ級数の部分和 $S_N[f]$ は次のように表現される：

$$\begin{aligned} S_N[f](\theta) &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(\theta-y)} dy = (f * D_N)(\theta). \end{aligned} \quad (0.1)$$

ここで、 $D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $N = 0, 1, 2, \dots$ はディリクレ核と呼ばれ、上式 (0.1) は、 $S_N[f]$ が f とディリクレ核 D_N との畳み込みで表現できることを意味し、 D_N の振るまいがフーリエ級数の収束問題に影響を与えると考えることは自然であろう。また、 D_N は $D_N(\theta) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$ と表すことができ、この表現は、後述するフェイエール核が良い核の列であることを示す際に有用である。

2.3 良い核の定義と近似単位元収束定理

単位円周上の関数列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、次の3つの性質をもつとき良い核の列であるという：(a) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 1$, (b) $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\theta)| d\theta \leq M$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\delta \leq |x| \leq \pi\}} |K_n(\theta)| d\theta = 0$. ここで、 M は n に依らないある正定数であり、 δ は任意の正定数である。 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を良い核の列とするとき、次の収束定理が成り立つという意味において、同列は近似単位元と呼ばれる： f を単位円周上の可積分関数とすると、 f が点 θ で連続ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(\theta) = f(\theta)$$

が成り立つ。また、 f が単位円周全体で連続であるとき、上記の収束は θ に関して一様となる [1,6]。したがって、ディリクレ核が良い核の列であるならば、任意の連続関数に対し、そのフーリエ級数は一様収束することとなるが、実際にはディリクレ核は性質 (b) を満たさないことが分かり、それゆえ連続関数のフーリエ級数に対して、上記の近似単位元収束定理を直接適用することはできない。

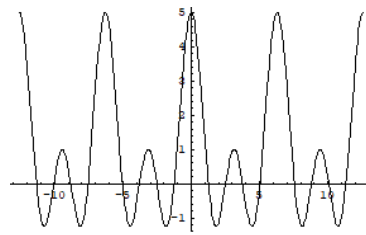


図1 ディリクレ核 ($N=2$)

Fig1 は、ディリクレ核 D_2 のグラフの概形であるが、これを見ると、その関数の値は正負の値を繰り返しながら振動していることが分かり、このことは $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ が良い核の列の性質 (a) は満たすが、(b) を満たさない要因である [1,2,3]。このディリクレ核の最大の欠点を補填し、連続関数に対するフーリエ級数の収束性を復活させる目的において、チェザロ総和法及びフェイエール核を次節以降で導入する。

2.4 チェザロ総和法

通常の総和法では、複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を考えるとき、その第 n 部分和を $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ と置くと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ であれば、この級数は収束し、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$ と書くのが一般的である。以下で定義されるチェザロ総和法は、通常の総和法を真に拡張した総和法であり、以下のように定義される。 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 n 部分和で定義される数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、その相加平均を用いて新しい数列 $\{\sigma_N\}_{N=1}^{\infty}$ を $\sigma_N = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}}{N}$ で定義する。 σ_N は数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 N チェザロ平均、あるいは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ の第 N チェザロ部分和と呼ばれる。 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \sigma$ であるとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は σ にチェザロ総和可能であるという。考える級数が関数項級数の場合は、関数列 $\{\sigma_N\}_{N=1}^{\infty}$ の収束の仕方に応じ、各点でチェザロ総和可能、一様にチェザロ総和可能などという。チェザロ総和法が通常の総和法の真なる拡張であることは、例えば $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ を考えればよい。実際、この級数は明らかに通常の意味においては収束しないが、チェザロ総和可能であり、その和は $\frac{1}{2}$ となる [4]。

2.5 フェイエールの定理

f を単位円周上の可積分関数とすると、 f のフーリエ級数の第 N チェザロ平均 $\sigma_N[f]$ は

$$\sigma_N[f](\theta) = f * \frac{D_0(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta)}{N} = (f * F_N)(\theta)$$

となる。ここで、 $F_N(\theta) = \frac{D_0(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta)}{N}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $N = 1, 2, \dots$, はフェイエール核と呼ばれる。また、ディリクレ核の三角関数を用いた表現により、フェイエール核は $F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{N\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$ と表すことができる。この表現を用いると、ディリクレ核の場合と異なり、フェイエール核は良い核の列であることが示される [1,5]。2つの核、 D_N と F_N の最も大きな違いは、前者は上述したように関数の値が正負の値を繰り返しながら振動しているのに対し、後者は常に正値であり、このことは $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ は良い核の列の性質 (b) を満足しないのに対し、 $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ は性質 (b) を満足することの本質的な要因であると考えられる。実際に $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ が良い核の列であることの証明の概略を以下で述べる [1]。まず、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} 2\pi = 1 \end{aligned}$$

となり、性質 (a) が確かめられる。性質 (b) は、性質 (a) と F_N が正値であることから直ちに示される。最後に、性質 (c) を示そう。 $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ のとき、 $\sin^2(\frac{\theta}{2}) \geq c_\delta$ となる $c_\delta > 0$ が存在するから、

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{N\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \leq \frac{1}{N c_\delta}$$

と評価される。これを用いて、

$$\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} F_N(\theta) d\theta \leq \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \frac{1}{N c_\delta} d\theta \leq \frac{2\pi}{N c_\delta} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

となり、性質 (c) が示される。 $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ が良い核の列であることより、同核の列に対して近似単位元収束定理が適用可能であるから、次の定理が直ちに得られる。

フェイエールの定理： f を単位円周上の可積分関数とする。 f のフーリエ級数は、 f が連続である

点で f にチェザロ総和可能である．とくに, f が単位円周上で連続ならば, f のフーリエ級数は f に一様にチェザロ総和可能である．

3. テプリッツの定理

2.4 節では, チェザロ総和法について述べたが, 本論文の主題であるフェイエールの定理の拡張可能性を考察する目的において, チェザロ総和法を含む総和法のメタ定理を以下に述べる．数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ とその部分和 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n = 0, 1, 2, \dots$ を考える．また, 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\dots}$ は以下の 3 つの条件を満たすとする: (i) 各 k について $\phi_{n,k} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ, (ii) 各 n について k に関する和 $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_{n,k}|$ が収束し, $\sigma_n \leq M$ を満たす n に無依存な正定数 M が存在する, (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} = 1$ である．このとき, $S_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ ならば $t_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ．上記の総和法に関するメタ定理はテプリッツの定理と呼ばれ, 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\dots}$ を適当な関数とすると, 通常の総和法, チェザロ総和法, アーベル総和法などを再現することが可能である [4]．

4. α 次チェザロ総和

$0 < \alpha < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, α 次第 n チェザロ総和平均を

$$\sigma_n^\alpha := \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\alpha \Gamma(n) \Gamma(\alpha + n - \nu - 1)}{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(n - \nu)} S_\nu$$

で定義する．本論文では $0 < \alpha < 1$ の場合を主に考察するが, 上式において, $\alpha = 1$ とおくと, 通常の第 n チェザロ総和平均が得られることに注意する．また, 適当な 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\dots}$ を選択することにより, α 次チェザロ総和法はテプリッツの定理の枠組みに属することが確認される．また, α 次総和法は α に関して単調にその収束概念を拡張したものであり, 特に, α 次総和可能な級数は, 通常の意味においてもチェザロ総和可能であることが分かる [4]．

5. α 次フェイエール核

ディリクレ核, フェイエール核の導出と同様にして, フーリエ級数を α 次チェザロ総和を用いて表現するとき, 対応する α 次フェイエール核 F_n^α は

$$\sigma_n^\alpha[f](\theta) = f * \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\alpha \Gamma(n) \Gamma(\alpha + n - \nu - 1)}{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(n - \nu)} D_\nu(\theta) = f * F_n^\alpha(\theta)$$

と表される．前述したように, 通常のフェイエール核は良い核の列となり, フェイエールの定理が成立するが, 本論文では α 次フェイエール核も良い核の列であるかどうかを検証した．もし α 次フェイエール核が良い核の列であれば, 近似単位元収束定理の帰結として, α 次フェイエール型定理が成立することとなり, このことは, α 次チェザロ総和法が通常のチェザロ総和法の真なる拡張である事実を考慮し, 古典的なフェイエールの定理の拡張版が成立することを意味する．

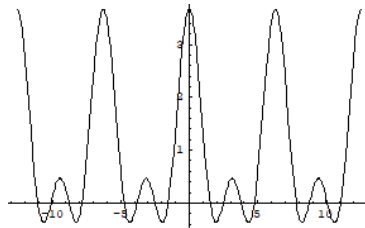


図2 α 次フェイエール核 ($n = 3$)

しかしながら, α 次フェイエール核はディリクレ核, フェイエール核と比較して, その関数形は複雑であり, 同核が良い核の列であるかどうかを検証することは非常に困難であった．他方, Fig2

より、 α 次フェイエル核は正負の値を繰り返しながら振動することが観察され、この挙動はディリクレ核のものと同じであることに注意する。この状況を踏まえ、 α 次フェイエル型定理の不成立という否定的結論を想定するならば、フェイエル核に対し、良い核の列の 3 条件を確認することはあまり得策ではないと考えられる。なぜならば、一般の関数核に対し、それが良い核の列であるということは、同核が単位近似元であるための十分条件であるが必要条件ではないからである。したがって、デュボアレイモンが提示した連続関数でありながら、ある 1 点でそのフーリエ級数が発散するような関数を、 α 次フェイエル核を通して定まる α 次フーリエ級数に直接代入し、同級数が発散するかどうかを検証した。デュボアレイモンが提示した連続関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin a_n x & (\frac{\pi}{a_n} < x < \frac{2^n}{a_n} \pi, \quad n = 1, 2, \dots), \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \sin a_n x & (-\frac{2^n}{a_n} \pi < x < -\frac{\pi}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots), \\ 0 & (\frac{2^{n+1}}{a_{n+1}} \pi \leq |x| \leq -\frac{\pi}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots), \\ 0 & (x = 0, \frac{2}{a_1} \pi \leq |x| \leq \pi), \end{cases} \quad (0.2)$$

で与えられる [6]。このとき、直接計算より、 f の α 次フーリエ級数のある部分級数が存在して、その部分級数は、

$$\frac{\alpha \Gamma(n)}{\pi \Gamma(\alpha + n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + n - k - 1)}{\Gamma(n - k)} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{k - 3}{6} \geq C \sqrt{n} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

と評価されることが確認された。ここで、 C は n に無依存な正定数である。上記の評価は、 f の α 次フーリエ級数全体に対するものではないため、同評価により、 $\sigma_n^\alpha[f](0) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$ と結論付けることは早計であるが、 α 次フェイエル型定理の不成立を証明する際の重要な不等式の 1 つであると言える。

6. 結言

デュボアレイモンの提示した関数を用いて、 α 次フェイエル型定理の不成立を強く予測させる事象を観察した。すなわち、 α 次フェイエル型定理の不成立を期待する根拠の 1 つを得ることに成功し、このことは通常のフェイエールの定理の最適性を示唆するものと考えられる。

参考文献

- [1] エリアス・M・スタイン、ラミ・シャカルチ「フーリエ解析入門」(新井仁之、杉本充、高木啓行、千原浩之訳)、日本評論社、2007。
- [2] G.E.Andrews.Number theory.Dover Publications, New York, 1994.Corrected reprint of the 1971 originally published by W.B.Saunders Company.
- [3] C.Blingham and J.W.Tukey.Fourier methods in the frequency analysis of data. The Collected Works of John W Tukey, Volume II Times Series:1965-1984(Wadsworth Advanced Books & Software), 1984.
- [4] 梅田亨、「徹底入門 解析学」、日本評論社、2017。
- [5] S.Bochner.The role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.(訳:S. ボホナー、科学史における数学、村田全訳、みすず書房、1970)
- [6] T.W.Körner. Fourier Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, UK,v 1988.(訳:T.W. ケルナー、フーリエ解析大全、上、下、高橋陽一郎監訳、朝倉書店、1996)