

切除多項式環の代数的 K 群とそれに付随する Verschiebung 射

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

堀内遼

Horiuchi Ryo

1 序

このポスター発表では TR と呼ばれる環スペクトラムのホモロジー論を使った代数的 K 群の計算を紹介する。本稿では他分野あるいは初学者の方が読まれる事を想定し、発表内容とは必ずしも直接的に関連しないものも含めて基礎的な事実や有名な定理をいくつか紹介する。またこの分野に興味を持たれた方の便宜のためにやや多めに参考文献を引くことにする。

スペクトラムとは基点付き空間の列のようなものであり、スペクトラムの圏は対称モノイダル構造を持っている（この辺りの話は [28]、[29]、[23] などがまとまっていると思う）。各次元の球面よりなる球面スペクトラム $\mathcal{S}$ は特に重要で、その対称モノイダル構造の単位対象にもなっている。この対称モノイダル構造におけるモノイド対象のことを環スペクトラムと呼ぶ。Eilenberg-MacLane 空間を使うと、加法群のなす圏からスペクトラムのなす圏に関手が構成できるが、それは環の圏から環スペクトラムの圏への関手を誘導する。つまりこの意味で、イニシャルな環 $\mathbb{Z}$ はイニシャルな環スペクトラム $\mathcal{S}$ 上の代数とみなされる。基礎環が $\mathbb{Z}$ から $\mathcal{S}$ に下ろされた新しい代数を研究しようという提案が 80 年代に Waldhausen によってなされ、長らく研究されてきた。つまり、円とか球という幾何的に最も基本的らしきものが整数という代数側で最も基本的らしきものより代数として深い、という立場による研究領域があるということである。

そういった研究の一つの大きな道具として、Bökstedt[5] により導入された位相的 Hochschild ホモロジー THH がある。当初は主に代数的 K 理論を計算するための道具として研究されていたようである（[9] や [24] などに詳しい）。この THH から派生していくつかのホモロジー論（TF、TR、TC、TP、TC⁻ など）が知られているが、本発表は TR に関するものである。他のホモロジー論も重要であり、例えば最近では [1] や [10] など数論幾何学方面で使われているようである。古典的なところでは [6] が TC と K 理論、あるいは A 理論を比較している。

2 背景

定義 1. A を環スペクトラムとする。上述のモノイダル構造による A の巡回バー構成を $\mathrm{THH}(A)$ と書く。これは A の位相的 Hochschild ホモロジーと呼ばれる。

余極限があるような対称モノイダル圏があって、そのモノイド対象があれば、巡回バー構成を考え

て諸々ひとまずホモロジー論に持ち込むというのは常套手段だろうが、THH もその一例である。通常の Hochschild ホモロジー HH もその類であるし、THH は HH のスペクトラム的一般化とも思える ([18] や [26] に詳しい)。この意味で THH は環スペクトラムを考えたい時に自然に現れる基本的な不変量であると言える。なおこの定義は [5] のものと少し違うが、同等のものである ([27] 参照)。

THH はその構成から、円周群 $\mathbb{T}$ の作用を受ける ([8]、[19]、[30] など参照)。この自然な作用が THH の解析や TR などの他のホモロジー論の構成には重要である。

正の自然数 n に対し C_n で n 次巡回群を表し、 $\mathbb{T}$ の部分群と思う。よって X が $\mathbb{T}$ -作用のあるスペクトラムであったら、 $\mathbb{T}$ -作用の制限として X は C_n の作用も受ける。その作用に関するノルム射のコファイバーを X^{tC_n} と書く。

定義 2 ([15], [26]). X を $\mathbb{T}$ -作用のあるスペクトラムとする。任意の素数 p に対して、 $\mathbb{T} \cong \mathbb{T}/C_p$ -同変なスペクトラムの射

$$X \longrightarrow X^{tC_p}$$

が存在する時、 X は円分スペクトラムであるという。

円分スペクトラムは元々 [15] で導入された概念であり、同変直交スペクトラムの言葉で定義されていた。それを最近、より簡単に高次圏の言葉を使って [26] が再導入した。なお、ある整数より低い次数のホモトピー群が全て消えているスペクトラムに対しては、この二つの定義は一致する ([26, Theorem 1.4] 参照)。

定理 1 ([15]). 任意の環スペクトラム A に対し、 $\mathrm{THH}(A)$ は円分スペクトラムである。

実際は THH の研究の中で円分スペクトラムという概念が導入されたわけだが、この定理の直接的なご利益の一つとして不変部分スペクトラムの間の射が挙げられる。以下に見るように、それは高次代数的なものと数論幾何的なものの直接的な比較を与え、最近ようやく広まり始めたホモトピー論と数論幾何の交錯する研究の口火を切った。

$\mathrm{THH}(A)$ には次の三つの射の族が定義されるが、 F と V は $\mathbb{T}$ の作用から得られ、 R は円分構造を使って定義される (詳しくは [15, §3.3] や [11] など参照)。 $\mathrm{THH}(A)^C$ は $\mathrm{THH}(A)$ の C -作用による不変部分スペクトラムである。

$$\begin{aligned} F_n &: \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_m} \\ V_n &: \mathrm{THH}(A)^{C_m} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}} \\ R_n &: \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_m} \end{aligned}$$

記号から察せられるように、これは Witt ベクトルの Frobenius 射、Verschiebung 射、制限射に対応している (Witt ベクトルの歴史は長いが、新しい文献としては [2] や [4] などがある)。具体的には以下の定理がある。 $\mathbb{W}_{\langle n \rangle}$ は n の約数のなす切除集合に付随する Witt ベクトルである。

定理 2 ([15]). 可換環 R と任意の自然数 $n \geq 1$ に対し、自然な環同型

$$\pi_0(\mathrm{THH}(R)^{C_n}) \cong \mathbb{W}_{\langle n \rangle}(R)$$

がある。さらにこの同型は Frobenius 射、Verschiebung 射、制限射とも整合的である。^{*1}

^{*1} この定理は非常に重要で、例えば [22] では a very beautiful result と紹介されているし、円分構造と λ -構造を結びつ

3 主結果

環スペクトラム A に対し、 $\mathrm{TR}^n(A) := \mathrm{THH}(A)^{C_n}$ と置く。[12, §5] で正則な $\mathbb{F}_p$ -代数に対しての $\mathrm{TR}^\bullet$ と de Rham-Witt 複体の比較がされている。ここで詳しく述べることはできないが、それは定理 2 の一つの発展形と見なす事もできる。de Rham-Witt 複体に関しては、[14] で詳しく調べられている。

以下が本講演の主結果である。

定理 3 ([17]). A を環とする。素数 p が A において冪零である時、以下の長完全列の間の射がある。

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \lim_R \mathrm{TR}_{q-\lambda_{d_{i,k}}}^{i/k}(A) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \lim_R \mathrm{TR}_{q-\lambda_{d_{i,kn}}}^{i/kn}(A) \\
 \downarrow V_{k*} & & \downarrow V_{kn*} \\
 \lim_R \mathrm{TR}_{q-\lambda_{d_{i,k}}}^i(A) & \xrightarrow{V_{n*}} & \lim_R \mathrm{TR}_{q-\lambda_{d_{i,kn}}}^i(A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K_{q+1}(A[x]/(x^k), (x)) & \xrightarrow{v_n} & K_{q+1}(A[x]/(x^{nk}), (x)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array},$$

ここで $\lambda_{d_{i,k}}$ は $(i-1)/k$ の整数部分の 2 倍、 V_{n*} は Verschiebung 射に誘導される射を表し、 v_n は $x \mapsto x^n$ で誘導される射であり、 $\lim_R$ は円分構造から定まる制限射による極限である。

この縦の長完全列は [16] によって得られている。また、標準的な射影

$$A[x]/(x^m) \rightarrow A[x]/(x^n)$$

により誘導される射

$$K_*(A[x]/(x^m), (x)) \rightarrow K_*(A[x]/(x^n), (x))$$

に付随する長完全列の射は [12, Theorem A] において解析されている。こういった切除多項式環の K 群の THH を用いた解析において鍵となるのは [15, THEOREM 7.1] である。この定理は元々位相幾何的に証明されたが、最近 Speirs[31] により [26] の言葉で再証明された。

けた初めての定理と思われる。さらには非可換環への拡張 [13] もあり、[21] や [25] などのように展開されている。また、Witt ベクトルの理論は [2] で半環に対してまで拡張されている ([3]、[4]、[20] も参照されたい)。実は ∞ -重群のホモトピー論を使わずにスペクトラムを構成すれば、 $\mathbb{S}$ は自然数のなすユニシャルな半環 $\mathbb{N}$ よりも深い代数であることもわかる (例えば [7] では Boolean 半体 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ の Eilenberg-MacLane スペクトラムについて調べられている)。しかし、ホモトピー “群” が一般に (群ではない) モノイドになりうるようなものの幾何学はおそらくまだなく、定理 2 の $\mathbb{N}$ -代数への拡張は知られていない。

正則な $\mathbb{F}_p$ -代数に対しては、[12] による $\mathrm{TR}^\bullet$ と de Rham-Witt 複体の対応を使って上の図式を de Rham-Witt 複体で書き換えることができる。

系 4 ([17]). p を素数とし、 A を正則な $\mathbb{F}_p$ -代数とする。この時、以下の長完全列の間の射がある。

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{W}_{l+1} \Omega_A^{q-2l} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{W}_{l+1} \Omega_A^{q-2l} \\
\downarrow V_{k*} & & \downarrow V_{kn*} \\
\bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{W}_{k(l+1)} \Omega_A^{q-2l} & \xrightarrow{V_{n*}} & \bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{W}_{kn(l+1)} \Omega_A^{q-2l} \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{q+1}(A[x]/(x^k), (x)) & \xrightarrow{v_n} & K_{q+1}(A[x]/(x^{nk}), (x)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array},$$

ここで、 $\mathbb{W}_{(-)} \Omega_A^*$ は A 上の de Rham-Witt 複体であり、添字 $m(l+1)$ は切除集合 $\{1, 2, \dots, m(l+1)\}$ を表し、 V_{n*} は Verschiebung 射に誘導される射である。

この系において、 $A = \mathbb{F}_p$ とすると次が得られる。

系 5. 自然数 $j \geq 1$ に対し、

$$K_{2j-1}(\mathbb{F}_p[x^{1/p^\infty}], (x)) = \mathrm{colim}_n (\mathbb{W}_{jp^n}(\mathbb{F}_p)/V_{p^n} \mathbb{W}_j(\mathbb{F}_p)),$$

さらに偶数次の K 群は自明である。

実はもう少し一般の環に対しても系 5 は成り立つ ([17, Corollary 4.7, 4.8]) が、この形が最も基本的だと思う。

参考文献

- [1] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze, Topological Hochschild homology and integral p -adic Hodge theory, arXiv:1802.03261, 2018.
- [2] J. Borger, Witt vectors, semirings, and total positivity, Absolute Arithmetic and F1-Geometry. EMS Publishing House, 2016
- [3] J. Borger, D. Grinberg, Boolean Witt vectors and an integral Edrei-Thoma theorem, Selecta Mathematica 22(2) (2016), pp 595-629.
- [4] J. Borger, B. Wieland, Plethystic algebra. Adv. Math. 194 (2005), 246-283.
- [5] M. Bökstedt, Topological Hochschild homology, Bielefeld preprint (1985).

- [6] M. Bökstedt, W.C. Hsiang and I. Madsen The cyclotomic trace and algebraic K -theory of spaces *Invent. Math.*, 111, 1993, p. 465-539.
- [7] A. Connes, C. Consani, Absolute algebra and Segal's Γ -rings: au dessous de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. To appear in *Journal of Number Theory*.
- [8] V. Drinfeld, On the notion of geometric realization, *Moscow Mathematical Journal* Volume 4, Number 3, July-September 2004, Pages 619-626
- [9] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, The local structure of algebraic K -theory. *Algebra and Applications*, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.
- [10] L. Hesselholt, Periodic topological cyclic homology and the Hasse-Weil zeta function, *An Alpine Bouquet of Algebraic Topology* (Saas Almagell, Switzerland, 2016), pp. 157-180, *Contemp. Math.* 708, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 2018.
- [11] L. Hesselholt, K -theory of truncated polynomial algebras, *Handbook of K -theory*, vol. 1, pp. 71-110, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [12] L. Hesselholt, The tower of K -theory of truncated polynomial algebras, *J. Topol.* 1 (2008), 87-114.
- [13] L. Hesselholt, Witt vectors of non-commutative rings and topological cyclic homology, *Acta Math.* 178 (1997), no. 1, 109-141. MR 1448712
- [14] L. Hesselholt, The big de Rham-Witt complex, *Acta Math.* 214 (2015), 135-207.
- [15] L. Hesselholt, I. Madsen, On the K -theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields. *Topology* 36 (1997), no. 1, 29-102.
- [16] L. Hesselholt, I. Madsen, Cyclic polytopes and the K -theory of truncated polynomial algebras, *Invent. Math.* 130 (1997), 73-97.
- [17] R. Horiuchi, Verschiebung maps among K -groups of truncated polynomial algebras, arXiv:1712.03189
- [18] M. Hoyois, The fixed points of the circle action on Hochschild homology, arXiv:1506.07123.
- [19] J.D.S. Jones, Cyclic homology and equivariant homology, *Invent. Math.* 87, 403-423 (1987)
- [20] A. Joyal. δ -anneaux et vecteurs de Witt. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 7(3):177-182, 1985.
- [21] D. Kaledin, Hochschild-Witt complex, arXiv:1604.01588
- [22] A. Krause, T. Nikolaus, Lectures on topological Hochschild homology and cyclotomic spectra, <https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/index.html>
- [23] J. Lurie, Higher algebra, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>
- [24] I. Madsen, Algebraic K -theory and traces, *Current Developments in Mathematics*, 1995
- [25] A. Mathew, Kaledin's degeneration theorem and topological Hochschild homology, arXiv:1710.09045
- [26] T. Nikolaus, P. Scholze, On topological cyclic homology, arXiv:1707.01799
- [27] I. Patchkoria, S. Sagave, Topological Hochschild homology and the cyclic bar construction in symmetric spectra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), no. 9, 4099-4106.

- [28] S. Schwede, Symmetric spectra, <http://www.math.uni-bonn.de/~schwede/>
- [29] S. Schwede, Lecture notes on equivariant stable homotopy theory, <http://www.math.uni-bonn.de/~schwede/>
- [30] J. Spalinski, Strong homotopy theory of cyclic sets, J. of Pure and Appl. Alg. 99 (1995), 35-52.
- [31] M. Speirs, On the algebraic K -theory of coordinate axes and truncated polynomial algebras, Ph.D. thesis, 2018.