

古典幾何における内接多角形の面積公式

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理学専攻
梅澤瑠奈 (Runa UMEZAWA)

1 はじめに

ユークリッド幾何では三角形のとき Heron の公式, 内接四角形のとき Brahmagupta の公式など、面積をその辺の長さおよびべき根で表す公式 (以下面積公式とかく) が知られている. 松本幸夫先生達はユークリッド幾何で円に内接する n 角形の面積公式が、 $n \geq 5$ だと存在しないことをガロア理論を用いて示した. 一方、双曲幾何や球面幾何でも三角形や内接四角形の面積公式が知られている. そこで松本先生達の結果の拡張として、双曲幾何や球面幾何でも円に内接する n 角形の面積公式が $n \geq 5$ だと存在しないことを、早稲田大学教育学部の小森洋平先生と教育学研究科修士 1 年の安井拓朗さんとの共同研究で示した.

2 ユークリッド内接多角形のとき

三角形や円に内接する四角形は辺の長さの四則演算とべき根を使って面積を表す公式が知られている. 円に内接する三角形 ABC の面積 S は Heron の公式として知られていて $s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と表せる.

また四角形 $ABCD$ の面積 S は Brahmagupta の公式として知られていて $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

と表せる.

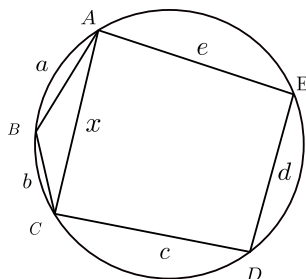
松本先生達は論文 [2] で次の定理を示した.

定理 1. 任意の 5 以上の自然数 n に対して面積を辺の長さの四則演算とべき乗で表す公式が存在しない.

松本先生達は $n = 5$ の場合と $n \geq 6$ のときに場合分けをして示した.

$n = 5$ のときをまず示す. 円に内接する五角形に面積公式が存在しないことは次の補題より分かる.

補題 1. [2, lemma1] 対角線 AC の長さを x , また S を五角形の面積とすると x は $\mathbb{Q}(a, b, c, d, e, S)$ 係数の 4 次式を満たす.



補題 2. [2, lemma2] 対角線 AC の長さ x は $\mathbb{Q}(a, b, c, d, e)$ 係数の 7 次式を満たす. 特に $a = b$ とすれば $x = AC$ は $\mathbb{Q}(a, c, d, e)$ 係数の 5 次式を満たす.

補題 3. 辺の長さが $(a, b, c, d, e) = (1, 1, 2, 3, 4)$ の円に内接する五角形が存在する [2, Proposition 4]. この時、対角線 $x = AC$ は 5 次方程式

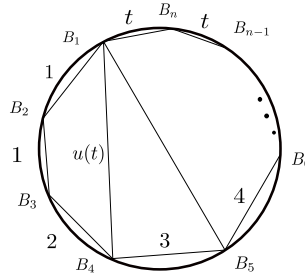
$$f(x) = 8x^5 + 81x^4 + 200x^3 - 114x^2 - 864x - 723 = 0$$

とおく. このとき $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で $f(x)$ のガロア群は S_5 と同型になり, 可解群でない.[2, lemma3]

これらの補題から $n = 5$ のときの定理 1 の証明ができる.

証明. 背理法で示す. 五角形の面積 S が $\mathbb{Q}(a, b, c, d, e)$ の四則演算とべき根で表されると仮定する. 補題 1 より $x = AC$ は $\mathbb{Q}(S, a, b, c, d, e)$ 係数の 4 次式の根であるからガロア理論の結果より x の $\mathbb{Q}(S, a, b, c, d, e)$ 上の最小多項式のガロア群は可解群になる. よって x は S, a, b, c, d, e の四則演算とべき根で表せる. 最初の仮定より S も a, b, c, d, e の四則演算とべき根で表せると仮定したので x も a, b, c, d, e の四則演算とべき根で表せることになる. つまり x の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式のガロア群は補題 3 より可解群でないことに矛盾する. $\square$

次に $n \geq 6$ のときを示す. 辺の長さが $1, 1, 2, 3, 4, t, \dots, t$ の n 角形の面積公式を $F(t) = F(1, 1, 2, 3, 4, t, \dots, t)$ とする.



証明に必要な命題を準備しておく.

$F(t)$ がピュイズー級数の比で表される理由が次の命題である.

命題 1. [2, prop 7] $F(t)$ が $\mathbb{Q}(t)$ のべき根拡大に含まれるとする. また $F(t)$ は恒等的に 0 でなく, 有限個の $\mathbb{Q}$ 係数多項式に $+, -, \times$, と k 乗根を使って得られるとする. 単連結, かつ分岐点集合との共通部分が空集合である $D \subset \mathbb{C}$ が $(0, \varepsilon)$ を含むと仮定する. ただし D は 0 を含まず ε は十分小さくとる. このとき $F(t)$ の D 上の各分岐に対して $D_\varepsilon := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\} \cap D$ の連結成分で $(0, \varepsilon)$ を含むものとする } と定義する.

$t \in D_\varepsilon$ に対して

$$F(t) = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{p}} + \dots$$

を満たす $p \in \mathbb{N}$ が存在する. ただし c_i は $\mathbb{Q}$ のべき根拡大である.

$$F(t) = \frac{c_i + c_{i+1} t^{\frac{1}{p}} + c_{i+2} t^{\frac{2}{p}} + \dots}{d_j + d_{j+1} t^{\frac{1}{q}} + d_{j+2} t^{\frac{2}{q}} + \dots}$$

ならば

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = \frac{c_i}{d_j}$$

ただし c_i, d_j は $\mathbb{Q}$ 上べき根拡大の元.

命題 2. [2, prop 7]

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = S(1, 1, 2, 3, 4)$$

証明. n 角形の面積公式が存在したと仮定して矛盾を導く.

命題 1 より n 角形の面積公式 $F(t)$ がべき根拡大の元で表せることが分かった. 一方で命題 2 より $S(1, 1, 2, 3, 4)$ という辺の長さの四則演算とべき根で表せないことが証明されている五角形の面積であるから矛盾する. $\square$

3 双曲・球面内接五角形

双曲内接 n 角形や球面内接 n 角形に対しても同様に $n = 3, 4$ のときは面積公式が存在するが $n \geq 5$ のとき存在しないことをこの章で述べる.

ユークリッド幾何での Heron の公式や Brahmagupta の公式にあたる同様の三角形や内接四角形の面積公式が双曲幾何や球面幾何の場合にもある. 以下のことが成り立つ.

双曲内接三角形, 四角形の面積公式

Billinski の公式 (論文 [4] より)

辺の長さが a, b, c, d の円に内接する双曲四角形の面積 S に対して次の式が成り立つ. $s(a) = \sinh(\frac{a}{2})$ と省略する. (例えば $d = 0$ のとき三角形の面積公式が成り立つ)

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{4 - 2(\sinh^2(\frac{a}{2}) + \sinh^2(\frac{b}{2}) + \sinh^2(\frac{c}{2}) + \sinh^2(\frac{d}{2}) - 4 \sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2} \sinh \frac{c}{2} \sinh \frac{d}{2})}{4 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{a}{2}} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{b}{2}} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{c}{2}} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{d}{2}}}$$

球面幾何の場合も類似の関係が論文 [3] より成り立つ.

球面内接三角形, 四角形の面積公式

論文 [3] より辺の長さが a, b, c, d の円に内接する球面四角形の面積 S に対して次の式が成り立つ. $s(a) = \sin a$ と省略する. (例えば $d = 0$ のとき三角形の面積公式が成り立つ)

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{4 + 2(\sin^2(\frac{a}{2}) + \sin^2(\frac{b}{2}) + \sin^2(\frac{c}{2}) + \sin^2(\frac{d}{2}) - 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2})}{4 \sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{b}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{c}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{d}{2}}}$$

ユークリッドのときは辺の長さで面積を直接表せたが双曲幾何のときは辺を 2 で割って $\sinh$ したものの四則演算で面積を 2 で割った $\cos$ が表される.

以下双曲幾何・球面幾何での松本先生達の論文の流れを見ていく.

補題 4 (補題 1 の双曲版). 円に内接する双曲五角形 $ABCDE$ の面積を S , 対角線 AC の長さを x とすると $s(x) = \sinh \frac{x}{2}$ は $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos \frac{S}{2})$ の四則演算とべき根で表される四次式の根になる.

補題 5 (補題 1 の球面版). 円に内接する球面五角形 $ABCDE$ の面積を S , 対角線 AC の長さを x とすると $s(x) = \sin \frac{x}{2}$ は $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos \frac{S}{2})$ の四則演算とべき根で表される四次式の根になる.

証明. 松本先生達の論文に基づいて円に内接する五角形を三角形 A と四角形 B に分割する. 五角形の面積を S とすると Billinski の公式や球面での面積公式を使って計算すれば証明できる. $\square$

補題 2 の議論の際に必要なユークリッド距離と双曲・球面距離それぞれの関係が [1] の論文より成り立つ.

補題 6. ユークリッド距離と双曲距離の関係について

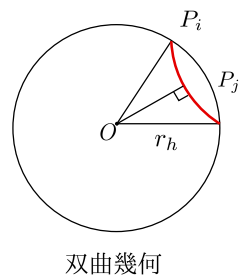
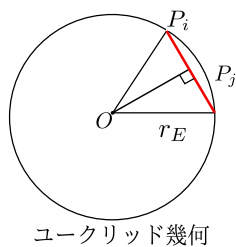
$$\sinh \frac{d_h(P_i P_j)}{2} = \frac{1}{1 - r_E^2} d_E(P_i P_j)$$

が成り立つ.

証明. 双曲幾何 (円盤モデル) において $r_E = \tanh \frac{r_h}{2}$ という関係が成り立つことから

$$\sinh \frac{|P_i P_j|_h}{2} = \frac{1}{1 - r_E^2} |P_i P_j|_E$$

となりユークリッド半径 r_E で決まることが分かった. $\square$

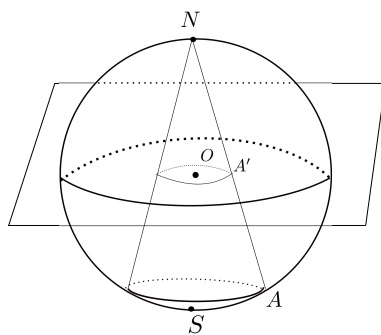


補題 7. 球面距離とユークリッド距離について

$$\sin \frac{d_s(P'_i P'_j)}{2} = \frac{1}{1 + r_E^2} d_E(P_i P_j)$$

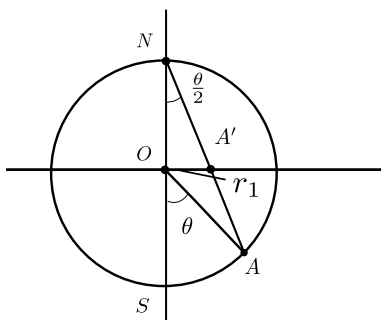
が成り立つ.

証明. 半径 1 の球の $(1, 0, 0)$ の点 N とするとき球面上の点 A を xy 平面上に立体射影した時の点を A' とする.



$$r_1 = r_E = \tan \frac{\theta}{2}$$

が分かる.



S 中心球面距離の半径 $r_s =$ 弧 AS であるから $r_s = \theta$ が成り立つので

$$r_E = \tan \frac{r_s}{2}$$

よって

$$\sin \frac{d_s(P, Q)}{2} = \frac{1}{1 + r_E^2} d_E(P' Q')$$

よってユークリッド距離 $a : b : c : d : e = 1 : 1 : 2 : 3 : 4$ に対して $s(a) : s(b) : s(c) : s(d) : s(e) = 1 : 1 : 2 : 3 : 4$ となる球面五角形が存在することがわかる。□

補題 8 (補題 2 の双曲版). 双曲内接五角形 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ に対して $s(P_1 P_3)$ は $\mathbb{Q}(s(P_1 P_2), s(P_2 P_3), s(P_3 P_4), s(P_4 P_5), s(P_5 P_1))$ 係数の 7 次式を満たす.

とくに $s(P_1 P_2) = s(P_2 P_3)$ のとき $\mathbb{Q}(s(P_1 P_2) = s(P_2 P_3), s(P_3 P_4), s(P_4 P_5), s(P_5 P_1))$ 係数の 5 次式を満たす.

証明. 松本先生達の論文よりユークリッド距離が 1, 1, 2, 3, 4 である辺をもつ五角形が内接するような円が存在することが分かった. その円の半径を r とすると補題 6 よりある m が存在して $\sinh(\frac{P_1 P_2}{2}) = \sinh(\frac{P_2 P_3}{2}) = \frac{1}{m}$, $\sinh(\frac{P_3 P_4}{2}) = \frac{2}{m}$, $\sinh(\frac{P_4 P_5}{2}) = \frac{3}{m}$, $\sinh(\frac{P_5 P_1}{2}) = \frac{4}{m}$ となる双曲五角形 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ が円に内接するように半径 r' がとれる. ただし $r' < 1$ である.

$x = \sinh(\frac{P_1 P_3}{2})$ とおくと松本先生達の論文の辺 a, b, c, d, e に対して $a = \sinh(\frac{P_1 P_2}{2}) = b = \sinh(\frac{P_2 P_3}{2})$, $c = \sinh(\frac{P_3 P_4}{2})$, $d = \sinh(\frac{P_4 P_5}{2})$, $e = \sinh(\frac{P_5 P_1}{2})$, $x = \sinh(\frac{P_1 P_3}{2})$ とすれば $\sinh(\frac{P_1 P_3}{2})$ についての 5 次式となることが分かる。□

補題 9 (補題 2 の球面版). 球面内接五角形 $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ に対して $s(P_1 P_3)$ は $\mathbb{Q}(s(P_1 P_2), s(P_2 P_3), s(P_3 P_4), s(P_4 P_5), s(P_5 P_1))$ 係数の 7 次式を満たす. とくに $s(P_1 P_2) = s(P_2 P_3)$ のとき $\mathbb{Q}(s(P_1 P_2) = s(P_2 P_3), s(P_3 P_4), s(P_4 P_5), s(P_5 P_1))$ 係数の 5 次式を満たす.

補題 10 (補題 3 の双曲・球面版). 松本先生の論文の $f(x)$ に対して x を $s(x)$ に置き換えた式が成り立つ. ガロア群は S_5 になる.

4 双曲・球面内接 n 角形 ($n \geq 6$ のとき)

松本先生達の論文 [2] と同様の流れで示す.

内接 n 角形の面積を S としたときその辺の長さ $a_1, \dots, a_n$ に対して $\cos \frac{S}{2}$ を $s(a_1), \dots, s(a_n)$ の四則演算とべき根のみで表せる面積公式が存在すると仮定する. それを $F(t)$ とする.

命題 3. $F(t)$ はピユーズー級数の比で表される.

十分小さい t に対して $(s(a_1) : s(a_2) : s(a_3) : s(a_4) : s(a_5) : s(a_6) : \dots : s(a_n)) = (1 : 1 : 2 : 3 : 4 : t \dots t)$ となる内接 n 角形が存在する.

命題 4.

$$\lim_{t \rightarrow +0} \cos \frac{S}{2} = \cos \frac{S(1, 1, 2, 3, 4)}{2}$$

よって矛盾が生じる.

References

- [1] R. Guo and N. Sönmez: Cyclic polygons in classical geometry, *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 64:2 (2011), 185–194.
- [2] Y. Matsumoto, Y. Matsutani, M. Oka, T. Sakai and T. Shibuya: On the area of a polygon inscribed in a circle, *L'Enseignement Mathématique* (2) 53 (2007), 127–153.

- [3] W. M'Clelland and T. Preston: A Treatise on Spherical Trigonometry with application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II, London: Macmillian and Co., 1886.
- [4] A. Mednykh: Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane. Sib. Elektron. Mat. Izv. 9 (2012), 247–255.