

周期点のカウント及びディオファントス近似について

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系

佐野 薫 (Kaoru Sano)

1 主定理とその背景

断りが無ければすべての多様体及び有理写像は $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする。多様体の自己射の n -周期点の個数の漸近挙動に関する予想をセミアール多様体 X の自己全射 $f: X \rightarrow X$ に対して証明する。その予想とは以下のようなものである：

Conjecture 1.1. X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな準射影多様体、 $f: X \rightarrow X$ を X の自己全射とする。 f の n -周期点の個数を Q_n で表す。任意の n について $Q_n < \infty$ であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Q_n = \log \max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(f)$$

となる。特に左辺の極限は存在する。

Theorem 1.2. X をセミアール多様体、 $f: X \rightarrow X$ を $Q_n < \infty$ であるような自己全射とする。このとき X, f に対しては *Conjecture 1.1* は正しい。

Remark 1.3. *Conjecture 1.1* の主張の右辺の

$$\log \max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(f)$$

は代数的エントロピーと呼ばれ、 $h_{\text{alg}}(f)$ で表される。ここで $d_k(f)$ は f の k 次力学系次数である。力学系次数については 2 節で触れる。今回は定義は述べないが、位相的エントロピー $h_{\text{top}}(f)$ という量が力学系の分野ではよく調べられており、これは力学系の複雑さをよく表した量である。[Gromov], [Yomdin] により X が射影多様体のときには

$$h_{\text{alg}}(f) = h_{\text{top}}(f)$$

であることが知られている。また一般に射影多様体の支配的な自己有理写像に対しては [Dinh-Sibony1] で

$$h_{\text{alg}}(f) \geq h_{\text{top}}(f)$$

が成り立つことが示されている。[Bowen] のオリジナルな予想では滑らかな射影多様体の自己射の場合に極限が $h_{\text{top}}(f)$ に一致すると主張されているが、 $h_{\text{top}}(f)$ が双有理不変ではなく準射影多様体の射影多様体への埋め込みに依存して変化するようである。このことは川口周氏及び小木曾啓示氏から教えて頂いた。一方力学系次数が双有理不変であることは [Dinh-Nguyễn], [Dinh-Nguyễn-Truong] で知られており、準射影多様体に対しては今回のように予想するのが妥当であると思われる。

極限の存在を証明する中で次の定理が必要となる。また次の定理は Baker の定理 (c.f. [Baker]) を用いて証明される。

Theorem 1.4. $|\lambda| = 1$ を満たすが 1 の冪根ではない代数的数 $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^n - 1|^{1/n} = 1$$

となる。

2 力学系次数の定義及び計算

Theorem 1.2 の証明のキーポイントは f の n -周期点の個数を力学系次数 $d_{\dim X}(f^n - \text{id}_X)$ で表し、明示的にその値を計算すること、及び極限の計算 Theorem 1.4 である。

Definition 2.1 (力学系次数). X を滑らかな射影多様体、 H を X の豊富な因子、 $f: X \dashrightarrow X$ を X の支配的な自己有理写像とする。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を f の不確定点除去とし、 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow X$ を誘導される射とする。このとき $f^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ を

$$f^* := \pi_* \tilde{f}^*$$

で定める。このとき k 次力学系次数 $d_k(f)$ が

$$d_k(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^n)^* H^k \cdot H^{\dim X - k})^{1/n}$$

で定義される。

Theorem 2.2 (代数的トーラスの力学系次数の計算 [Favre-Wulcan], [Lin1], [Lin2]). T を代数的トーラス、 $g: T \rightarrow T$ を T の自己全射準同型とする。このとき次が成立する：

- (a) ある整数係数正則行列 M が存在して $g = g_M$ と表せる。ここで g_A とは行列 $M = (m_{i,j})_{i,j}$ に付随する写像であって $g_M(x_1, x_2, \dots, x_N)$ の j 番目の成分が $\prod_{i=1}^N x_i^{m_{i,j}}$ で表せるものである。
- (b) A の固有値を絶対値が大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とすると力学系次数は

$$d_k(g) = \prod_{i=1}^k |\lambda_i|$$

となる。

- (c) 等式

$$\max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(g) = \prod_{|\lambda_i| \geq 1} |\lambda_i|$$

が成り立つ。

Theorem 2.3 (アーベル多様体の力学系次数の計算). A を $\mathbb{C}$ 上の代数的トーラス、 $g: A \rightarrow A$ を T の自己全射準同型とする。 $g_a: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ をその解析的表示としその表現行列を M とする。このとき次が成立する：

(a) M の固有値を絶対値が大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とすると力学系次数は

$$d_k(g) = \prod_{i=1}^k |\lambda_i|^2$$

となる。

(b) 等式

$$\max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(g) = \prod_{|\lambda_i| \geq 1} |\lambda_i|^2$$

が成り立つ。

Theorem 2.4 (セミアール多様体の力学系次数の計算). X を $\mathbb{C}$ 上のセミアール多様体、すなわち代数的トーラス T とアーベル多様体 A が存在して

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

という完全列をもつとする。 $g: X \longrightarrow X$ を全射自己準同型とする。このとき完全列及び g と可換な全射自己準同型

$$\begin{aligned} g_T: T &\longrightarrow T \\ g_A: A &\longrightarrow A \end{aligned}$$

が誘導され、力学系次数が

$$d_k(g) = \max_{0 \leq i \leq \dim Y} d_i(g_A) \cdot d_{\dim X - i}(g_T)$$

で計算される。

特に *Conjecture 1.1* の結論の右辺について

$$\max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(f) = \max_{0 \leq k \leq \dim T} d_k(g_T) \cdot \max_{0 \leq k \leq \dim A} d_k(g_A)$$

となる。

参考文献

- [Baker] Baker, A., *Transcendental number theory*, Cambridge university press, first edition, 1975.
- [Bowen] Bowen, R., *Topological entropy and axiom A*, Proc. Symp. in Pure Math. AMS vol 14, Global Analysis (1970), 23-41.
- [Dinh-Nguyên] Dinh, T-C. and Nguyên, V-A., *Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 4, 817–840.
- [Dinh-Nguyên-Truong] Dinh, T-C., Nguyên V-A., and Truong, T. T., *On the dynamical degrees of meromorphic maps preserving a fibration*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), no. 6, 1250042, 18 pp.

- [Dinh-Sibony1] Dinh, T-C. and Sibony, N., *Une borne sup ´ erieure pour l' entropie topologique d' une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637-1644.
- [Dinh-Sibony2] Dinh, T-C. and Sibony, N., *Equidistribution problems in complex dynamics of higher dimension*, Internat. J. Math. **28**, 1750057 (2007).
- [Favre-Wulcan] Favre, C. and Wulcan, E., *Degree growth of monomial maps and McMullen's polytope algebra*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 2, 493–524.
- [Gromov] Gromov, M., *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3–4, 217–235. (Manuscript, 1977).
- [Lin1] Lin, J-L., *Algebraic stability and degree growth of monomial maps*, Math. Z. **271** (2012), no. 1–2, 293-311.
- [Lin2] Lin, J-L., *Pulling back cohomology classes and dynamical degrees of monomial maps*, Bull. Soc. Math. France **140** (2012), no. 4, 533-549 (2013).
- [Mumford] Mumford, D., *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [Vojta] Vojta, P., *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I*, Invent. Math. **126** (1996), no. 1, 133–181.
- [Yomdin] Yomdin, Y., *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285-300.