

# グラフのラプラシアンから生じる線形符号の性質

名古屋工業大学 大学院工学研究科 情報工学専攻 情報数理分野

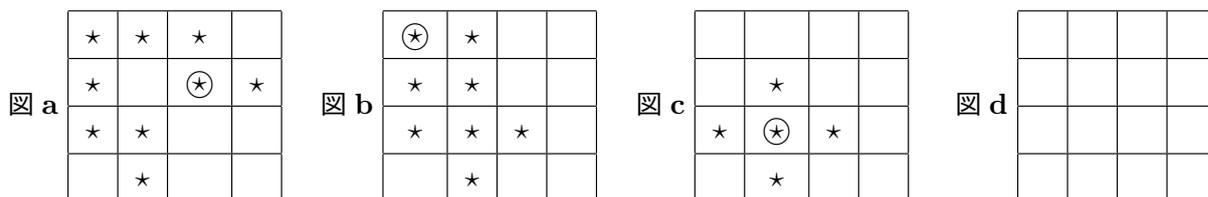
早田 裕貴 (Yuki Hayata)

## 概要

グラフのラプラシアンを二元体上の線形写像とみなし、その像と核を線形符号と考える。本発表では、まず頂点数が  $n$  のパスグラフ  $\mathbf{P}_n$  とサイクルグラフ  $\mathbf{C}_n$  の場合に、これらの符号の重み多項式を紹介する。またデカルト積  $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$  の場合に、小さい  $n$  に対しては重み多項式を計算し、大きい  $n$  に対しては重み多項式の最初のいくつかの係数を求めた。その計算結果から発見した、 $n$  を変えたときの重み多項式の係数や最小距離の関係を紹介する。

## 1 導入

本研究の動機であるライツアウトパズルの説明から始める。 $m \times n$  ライツアウトは縦に  $m$  個、横に  $n$  個の長方形に並べられたライト付きのボタンからなるパズルである。ボタンを押すとそのボタンについてのライトとその上下左右の合わせて最大 5 つのライトの点灯と消灯の状態が入れ替わる仕組みである。日本では、 $5 \times 5$  ライツアウトがタカラ (現タカラトミー) から発売された。例えば図 a のような初期状態の  $4 \times 4$  ライツアウトを考える。ただしライトの点灯状態を「\*」で表す。図 a の丸で囲まれてる位置のライトに付けられたボタンを押すと図 b の状態となる。同様に図 b の丸の位置のボタンを押すと図 c になり、図 c の丸の位置のボタンを押すと図 d つまり全消灯の状態となりゲーム終了である。このときに押した 3 つのボタンをライツアウトの解という。図 a のように解が存在する初期状態を解くことができる初期状態という。ここで、初期状態において点灯しているライトの数を初期状態の重みと呼ぶことにする。図 a の初期状態では重みは 9 である。



このパズルは、ライトが点灯している状態を 1 とし消灯している状態を 0 とすることで、ライトの点灯状態を  $\mathbb{F}_2$  上の  $m \times n$  行列として表現することができる。実際に図 a, b, c, d の状態はそれぞれ以下の行列  $B_a, B_b, B_c, B_d$  で表すことができる。

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般に初期状態  $\mathbf{b}$  に対する解  $\mathbf{x}$  は、連立方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を解くことにより求めることができる。上の例の場合、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となっている。列ベクトル  $\mathbf{b}$  は行列  $B_a$  の行を一行に並べて転置をとったものである。 $\mathbf{x}$  は  $\mathbf{b}$  の解の一例であり、押すボタンの位置の成分のみが 1 の行列と対応している。また、行列  $A$  は以下で説明するラプラシアンの特例である。

ライツアウトパズルは線形代数初学者に娯楽的題材として導入されることも多いが、グラフ理論、離散調和解析、力学系、セルオートマトンなどの観点からの研究も盛んである。先行研究として例えば [1] を挙げておく。

ライツアウトをトラス上で実現したパズルをトラスライツアウトという。本研究では  $n \times n$  のライツアウトとトラスライツアウトに対して、重み  $i$  の初期状態で解くことのできるものの個数が  $n$  によってどのように変化するかを調べる。

## 2 符号とグラフ

### 2.1 符号

符号理論の用語と記号は参考文献 [3] に従う。

二元体  $\mathbb{F}_2$  上の  $(n, k)$  線形符号  $\mathcal{C}$  とは  $\mathbb{F}_2^n$  の  $k$  次元部分空間のことを言う。 $\mathcal{C}$  の元を符号語といい、符号語における成分 1 の数をハミング重みという。線形符号において非零の符号語のハミング重みを最小距離という。

$(n, k)$  線形符号  $\mathcal{C}$  に対し、

$$A_i := \#\{\text{ハミング重みが } i \text{ の } \mathcal{C} \text{ の元}\}$$

と定義し、 $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  を符号  $\mathcal{C}$  の重み分布という。また、多項式

$$W_{\mathcal{C}}(x, y) := \sum_{i=0}^n A_i x^{n-i} y^i \quad (2)$$

を  $\mathcal{C}$  の重み多項式という。本研究では MacWilliams が発見した以下の定理が有用である。

**定理 2.1** (MacWilliams).  $(n, k)$  符号  $\mathcal{C}$  の双対符号 ( $\mathcal{C}$  の  $\mathbb{F}_2^n$  における直交補空間) を  $\mathcal{H} = \mathcal{C}^\perp$  とする。 $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{H}$  のそれぞれの重み多項式の間には以下の等式が成立する。

$$W_{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} W_{\mathcal{C}}(x + y, x - y)$$

### 2.2 グラフのラプラシアン of 定める符号

有限無向グラフ  $\Gamma = (V, E)$  ( $|V| = n$ ) に対して、 $\mathcal{F} := \text{Map}(V, \mathbb{F}_2)$  とし、 $\Gamma$  のラプラシアン  $\Delta_\Gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  を次で定義する。

$$(\Delta_\Gamma f)(v) := f(v) + \sum_{(w,v) \in E} f(w) \quad (v, w \in V, f \in \mathcal{F}) \quad (3)$$

頂点集合  $V$  に順序を導入することにより同型  $\mathcal{F} \simeq \mathbb{F}_2^n$  が成立するので、 $\Delta_\Gamma$  は  $\mathbb{F}_2^n$  から  $\mathbb{F}_2^n$  への線形写像とみなすことができる。これにより  $\text{Im } \Delta_\Gamma, \text{Ker } \Delta_\Gamma$  は線形符号とみなすことができ、 $(\text{Im } \Delta_\Gamma)^\perp = \text{Ker } \Delta_\Gamma$  が成立する。以下  $\mathcal{C} = \text{Im } \Delta_\Gamma, \mathcal{H} = \text{Ker } \Delta_\Gamma$  と記す。

**定義 2.2.** 以下のようにパスグラフとサイクルグラフを定義する。

- (1)  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $1 \leq i \leq n-1$  に対し  $v_i$  と  $v_{i+1}$  が隣接していて、それ以外に隣接する頂点の組が存在しないグラフをパスグラフといい  $\mathbf{P}_n$  と表す。
- (2)  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $1 \leq i \leq n$  に対し  $v_i$  と  $v_{(i \pmod n)+1}$  が隣接していて、それ以外に隣接する頂点の組が存在しないグラフをサイクルグラフといい  $\mathbf{C}_n$  と表す。

ここでグラフのデカルト積  $\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n$  (定義は省略) を考えると、(1) の行列  $\mathcal{A}$  は  $\Delta_{\mathbf{P}_4 \times \mathbf{P}_4}$  の行列表示である。したがって、 $\text{Im } \Delta_{\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n}$  は解くことのできる  $m \times n$  ライツアウトの初期状態の全体と

みなすことができる。同様に  $\text{Im } \Delta_{\mathbf{C}_m \times \mathbf{C}_n}$  は解くことのできる  $m \times n$  トーラスライツアウトの初期状態の全体とみなすことができる。 $\mathcal{C} = \text{Im } \Delta_{\Gamma}$  を線形符号とみなしたとき、ライツアウトの初期状態の重みはハミング重みと一致する。ゆえに、本研究の目的を符号理論の用語で述べると、符号  $\mathcal{C}$  の重み多項式の係数  $A_i$  が  $n$  によってどのように変化するのかを調べることに他ならない。

### 3 $\mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n$ のラプラシアンから生じる線形符号の重み多項式

$\Gamma = \mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n$  のとき、 $\mathcal{H} = \text{Ker } \Delta_{\Gamma}$  の次元が小さく基底を具体的に求めることができるので  $W_{\mathcal{H}}(x, y)$  が容易に求まり、MacWilliams の定理から  $\mathcal{C}$  の重み多項式は以下のように求まる。

**命題 3.1.**  $\Gamma = \mathbf{P}_n$  のとき、 $\mathcal{C}$  の重み多項式は以下の通りである。

$$W_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} (x+y)^n & (n \not\equiv 2 \pmod{3}) \\ \frac{1}{2}(x+y)^m((x+y)^{2m+2} + (x-y)^{2m+2}) & (n \equiv 2 \pmod{3}, n = 3m+2) \end{cases}$$

**系 3.2.**  $n = 3m+2$  のとき  $0 \leq k \leq 3m+2$  に対して以下が成立する。

$$A_k = \sum_{0 \leq i \leq m+1, 0 \leq j \leq m, 2i+j=k} \binom{2m+2}{2i} \binom{m}{j}$$

**命題 3.3.**  $\Gamma = \mathbf{C}_n$  のとき、 $\mathcal{C}$  の重み多項式は以下の通りである。

$$W_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} (x+y)^n & (n \not\equiv 0 \pmod{3}) \\ \frac{1}{4}(x+y)^m((x+y)^{2m} + 3(x-y)^{2m}) & (n \equiv 0 \pmod{3}, n = 3m) \end{cases}$$

**系 3.4.**  $n = 3m$  のとき  $0 \leq k \leq 3m$  に対して以下が成立する。

$$A_k = \sum_{0 \leq i \leq 2m, 0 \leq j \leq m, i+j=k} \frac{1+3(-1)^i}{4} \binom{2m}{i} \binom{m}{j}$$

### 4 $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$ のラプラシアンから生じる線形符号の性質

以下、 $\Gamma_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$  に対して  $\mathcal{C}_n = \text{Im } \Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n = \text{Ker } \Delta_{\Gamma_n}$  を考える。また、 $\mathcal{C}_n, \mathcal{H}_n = \mathcal{C}_n^{\perp}$  の重み多項式をそれぞれ以下のように記す。

$$W_n(x, y) = \sum_{i=0}^n A_i(n) x^{n-i} y^i, \quad W_n^{\perp}(x, y) = \sum_{i=0}^n A_i^{\perp}(n) x^{n-i} y^i$$

このとき定理 2.1 より、

$$W_n^{\perp}(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{C}_n|} W_n(x+y, x-y)$$

と記すことができる。また符号  $\mathcal{C}_n$  の最小距離を  $d_n$  とする。

#### 4.1 $\Gamma_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$ のとき

$\Gamma_n = \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$  に対して、 $\mathcal{C}_n = \text{Im } \Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n = \text{Ker } \Delta_{\Gamma_n}$  を定義する。このとき  $1 \leq n \leq 80$  において求めた  $\mathcal{C}_n$  の重み多項式の係数  $A_1(n)$  や  $\dim \mathcal{C}_n, \dim \mathcal{H}_n$  および最小距離  $d_n$  の値を表 1 に示す。以下、これらのデータの観察から得られた結果を紹介する。

表1  $\Delta_{\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n}$  のラブラシアンから生じる線形符号の次元および  $A_1(n), d_n$  の値

$n$	$A_1(n)$	$\dim \mathcal{C}_n$	$\dim \mathcal{H}_n$	$d_n$
1	1	1	0	1
2	4	4	0	1
3	9	9	0	1
4	0	12	4	2
5	5	23	2	1
6	36	36	0	1
7	49	49	0	1
8	64	64	0	1
9	1	73	8	1
10	100	100	0	1
11	9	115	6	1
12	144	144	0	1
13	169	169	0	1
14	52	192	4	1
15	225	225	0	1
16	0	248	8	2
17	109	287	2	1
18	324	324	0	1
19	1	345	16	1
20	400	400	0	1
21	441	441	0	1
22	484	484	0	1
23	9	515	14	1
24	176	572	4	1
25	625	625	0	1
26	676	676	0	1
27	729	729	0	1
28	784	784	0	1
29	53	831	10	1
30	0	880	20	2
31	961	961	0	1
32	0	1004	20	2
33	1	1073	16	1
34	372	1152	4	1
35	217	1219	6	1
36	1296	1296	0	1
37	1369	1369	0	1
38	1444	1444	0	1
39	1	1489	32	1
40	1600	1600	0	1

$n$	$A_1(n)$	$\dim \mathcal{C}_n$	$\dim \mathcal{H}_n$	$d_n$
41	701	1679	2	1
42	1764	1764	0	1
43	1849	1849	0	1
44	640	1932	4	1
45	2025	2025	0	1
46	2116	2116	0	1
47	9	2179	30	1
48	2304	2304	0	1
49	401	2393	8	1
50	196	2492	8	1
51	2601	2601	0	1
52	2704	2704	0	1
53	1189	2807	2	1
54	980	2912	4	1
55	3025	3025	0	1
56	3136	3136	0	1
57	3249	3249	0	1
58	3364	3364	0	1
59	53	3459	22	1
60	3600	3600	0	1
61	1	3681	40	1
62	0	3820	24	2
63	3969	3969	0	1
64	0	4068	28	2
65	1	4183	42	1
66	4356	4356	0	1
67	1	4457	32	1
68	4624	4624	0	1
69	841	4753	8	1
70	4900	4900	0	1
71	361	5027	14	1
72	5184	5184	0	1
73	5329	5329	0	1
74	1876	5472	4	1
75	5625	5625	0	1
76	5776	5776	0	1
77	2549	5927	2	1
78	6084	6084	0	1
79	1	6177	64	1
80	6400	6400	0	1

#### 4.1.1 $\mathcal{H}_n$ に関する性質

$\dim \mathcal{H}_n$  について以下が示せる。

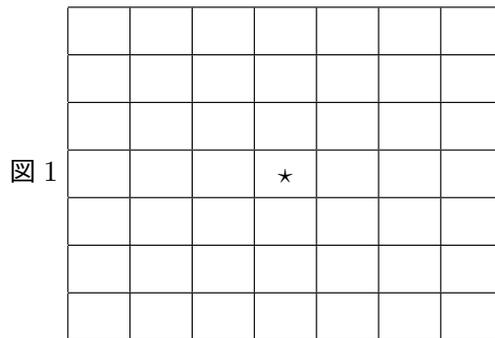
**定理 4.1.** 任意の自然数  $n$  に対して以下の 2 つが成立する。

- (1)  $\dim \mathcal{H}_n$  は偶数である。
- (2) 以下の 2 つは同値である。
  - (i)  $\dim \mathcal{H}_n$  は 4 の倍数である。
  - (ii)  $n + 1$  は奇数であるか 3 で割り切れない整数である。

#### 4.1.2 $\mathcal{C}_n$ に関する性質

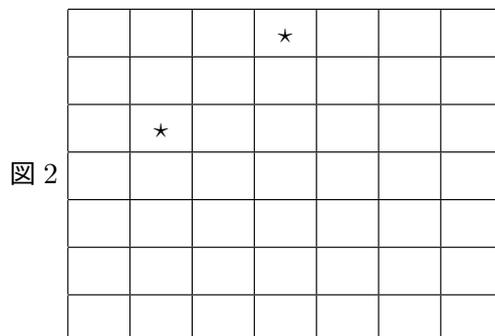
$\mathcal{C}_n$  の符号語、つまり解くことができる  $n \times n$  ライツアウトの初期状態について見つけた性質を紹介する。

**定理 4.2** ([2]).  $n$  が奇数のとき、中心の 1 個 ( $n \times n$  行列とみなしたときの  $(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2})$  成分) のみが点灯している初期状態は解くことができる。図 1 に  $n = 7$  の場合を示す。



これにより  $n$  が奇数のとき  $d_n = 1$  が成立することが分かる。

**定理 4.3.**  $n \geq 4$  のとき、 $n \times n$  行列表示をしたときの  $(1, 4), (3, 2)$  成分のライトが点灯している初期状態は解くことができる。図 2 に  $n = 7$  の場合を示す。



証明. 初期状態を  $n \times n$  行列表示したときの  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)$  成分のボタンを押すとすべてのライトが消灯状態となる。□

これにより任意の  $n$  について  $d_n \leq 2$  が成立することが分かる。

次に、表 1 から考えられる予想を紹介する。

予想 4.4. 以下の 2 つが成立する。

(1) 以下の 2 つが同値である。ただし  $n = 2, 6, 8, 14$  は除く。

(i)  $A_1(n) = 0$

(ii)  $n + 1 = 2^s \pm 1$

(2) 以下の 2 つは同値である。

(i)  $A_1(n) = 0$  または  $A_1(n) = 1$

(ii)  $A_1(2n + 1) = 1$

## 4.2 $\Gamma_n = \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$ のとき

$\Gamma_n = \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$  に対して、 $\mathcal{C}_n = \text{Im } \Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n = \text{Ker } \Delta_{\Gamma_n}$  を定義する。このときも同じように  $\mathcal{C}_n$  の重み多項式の係数  $A_1(n), A_2(n)$  や  $\dim \mathcal{C}_n, \dim \mathcal{H}_n$  および最小距離  $d_n$  の値を求めることができる。以下、そのデータの観察から得られた結果を紹介する。

### 4.2.1 $\mathcal{H}_n$ に関する性質

$\mathcal{H}_n$  の重み多項式について以下を示すことができる。

定理 4.5. 任意の自然数  $p$  に対して以下の 2 つは同値である。

(1)  $\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{H}_{pn}$

(2)  $W_{pn}^\perp(x, y) = W_n^\perp(x^{p^2}, y^{p^2})$

また定理 4.1 と似た以下の性質を示すことができる。

定理 4.6. 任意の自然数  $n$  に対して以下の 2 つが成立する。

(1)  $\dim \mathcal{H}_n$  は 4 の倍数である。

(2) 以下の 2 つは同値である。

(i)  $\dim \mathcal{H}_n$  は 8 の倍数である。

(ii)  $n$  は偶数であるか 3 で割り切れない整数である。

### 4.2.2 $\mathcal{C}_n$ に関する性質

このときの  $\mathcal{C}_n$  の最小距離について以下が証明できる。

定理 4.7. 任意の自然数  $n$  に対して、 $d_{2n} \leq d_n$  が成立する。

次に、研究結果より考えられる予想を紹介する。

予想 4.8. 以下の 3 つが成立する。

- (1) 任意の自然数  $n$  に対して以下の 2 つが同値である。
  - (i)  $A_i(n) = 0$
  - (ii)  $A_i(2n) = 0$
- (2)  $\dim \mathcal{H}_n \neq 0$  のとき、 $A_2(2n) = 4A_2(n)$  が成立する。
- (3) 任意の自然数  $n$  に対して  $d_{2n} = d_n$  が成立する。

定理 4.6 が証明できているので、予想の (1) を証明することができれば (3) が成立する。

## 参考文献

- [1] Goshima, Masato; Yamagishi, Masakazu. On the dimension of the space of harmonic functions on a discrete torus. *Experiment. Math.* 19 (2010), no. 4, 421–429.
- [2] Hayata, Yuki; Yamagishi, Masakazu. On weight one solvable configurations of the Lights Out puzzle. *Involve*, 掲載決定.
- [3] 平松豊一, 応用代数学, 裳華房, 1997.