有向グラフに対する一般荷重ゼータの伊原表示

横浜国立大学大学院 理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA)

概要

伊原表示とはグラフゼータ関数における行列式表示の一種であり, 中でも佐藤 [5] による第二種荷重ゼータの伊原表示は今野, 佐藤 [2] によって量子ウォークとの興味深い関係が示された. しかし, 現存する様々なグラフ上で定義された多岐にわたるゼータの多くは, 同様の議論により伊原表示を導出しているにも関わらず, 一般化した表示は導出されていない. 本講演では, まず伊原ゼータをはじめとする幾つものゼータを包括する "一般佐藤ゼータ" を紹介する. さらに, 対象とするグラフを一般の有限有向グラフとし, 言わば既存のグラフゼータの伊原表示を一般化した表示を導出したので紹介する. なお, 本研究は森田英章氏 (室蘭工業大学), 佐藤巌氏 (小山工業高等専門学校) との共同研究である.

1 定義

ある集合 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し, A を順序対の集合 $\{(v, w)|v, w \in V\}$ の部分集合とする. このとき, $\Delta = (V, A)$ を有向グラフといい, V, A の元をそれぞれ頂点, アークと呼ぶ. アーク $a = (v, w)$ に対し,v を a の尾, w を a の頭といい, それぞれ $\mathfrak{t}(a)$, $\mathfrak{h}(a)$ と書く. また, アーク (v, v) をループという. アークの列 $x = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が $\mathfrak{h}(a_i) = \mathfrak{t}(a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ を満たすとき, x を Δ 上の道, m をその長さと呼ぶ. 特に $\mathfrak{t}(a_1) = \mathfrak{h}(a_m)$ となるとき, x を閉路という. さらに, 道 x が任意の i に対して $\mathfrak{t}(a_i) \neq \mathfrak{h}(a_{i+1})$ を満たすとき, x は被約であるという.

$\Delta = (V, A)$ をループや多重辺を含む有限有向グラフとする. 頂点 $v, w \in V$ に対し, A の部分集合 $\mathfrak{A}_{v,w}, \mathfrak{A}(v, w)$ を以下で定める:

$$\mathfrak{A}_{v,w} = \{a \in A | \mathfrak{t}(a) = v, \mathfrak{h}(a) = w\}, \quad \mathfrak{A}(v, w) = \mathfrak{A}_{v,w} \sqcup \mathfrak{A}_{w,v}.$$

R を可換 $\mathbb{Q}$ 代数とし, 写像 $\tau, \upsilon : A \to R$ をアークの重みとする. このとき, 写像 $\theta : A \times A \to R$ を以下で定める:

$$\theta(a, a') = \tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \upsilon(a')\delta_{a^{-1}a'}.$$

ここで, δ はクロネッカーのデルタである. ただし, $\forall a \in \mathfrak{A}_{vw}, \forall b \in \mathfrak{A}_{wv}$ に対し, $b = a^{-1}$ と定めている. Δ 上の道 $x = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ に対し, その重みを $\chi(x) = \theta(a_1, a_2)\theta(a_2, a_3)\cdots\theta(a_m, a_1)$ で定める. $N_m(\chi)$ を Δ 上長さ m の被約閉路の重みの和とし, Δ に対するゼータ関数 $Z_\Delta(t)$ を以下で定める:

$$Z_\Delta(t) := \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{N_m(\chi)}{m} t^m\right).$$

Δ が有限対称有向グラフの場合, $\upsilon = 1$ としたものが第一種荷重ゼータ, $\tau = \upsilon$ としたものが第二種荷重ゼータ, $\tau = \upsilon = 1$ としたものが伊原ゼータである. すなわち, 一般佐藤ゼータはこれらを包括する枠組みを与える. それぞれの伊原表示は順に水野-佐藤 [3], 佐藤 [5], 伊原 [1] で得られている. 次節では $Z_\Delta(t)$ の伊原表示を導出する.

2　概要

$M := (\theta(a,a'))_{a,a' \in A}$ と置くと,

$$Z_\Delta(t) = \frac{1}{\det(I - tM)}$$

が成り立つ [4]. ここで, $H := (\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')})_{a,a' \in A}$, $J := (\upsilon(a')\delta_{a^{-1},a'})_{a,a' \in A}$ により $M = H - J$, $K := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in A, v \in V}$ $L := (\tau(a')\delta_{v\mathfrak{t}(a')})_{v \in V, a' \in A}$ により, $H = KL$ と表せる. したがって,

$$Z_\Delta(t)^{-1} = \det(I - tM) = \det(I - tL(I + tJ)^{-1}K)\det(I + tJ)$$

となる. 各 2 点間 $v, w \in V$ の部分グラフ $(V, \mathfrak{A}(v,w))$ における $J \in \mathrm{Mat}(\#\mathfrak{A}(v,w); R)$ を J^{vw} と置くと, $J = J^{v_1v_2} \oplus J^{v_3v_4} \oplus \cdots$ が成り立つ. K, L に対し, $K^{vw} \in \mathrm{Mat}(\#\mathfrak{A}(v,w), \#V; R), L^{vw} \in \mathrm{Mat}(\#V, \#\mathfrak{A}(v,w); R)$ を同様に定義すると, $K = (K^{v_1v_2}, K^{v_3v_4}, \cdots)^T$ $L = (L^{v_1v_2}, L^{v_3v_4}, \cdots)$. これにより, $L(I + tJ)^{-1}K$ は

$$\begin{aligned} L(I+tJ)^{-1}K &= \sum_{\{v,w\} \in V^2} L^{vw}(I + tJ^{vw})^{-1}K^{vw} \\ &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2 \\ \mathfrak{A}(v,w) \neq \phi}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}K^{vw} - t \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2, v \neq w \\ \#\mathfrak{A}_{vw}\#\mathfrak{A}_{w,v} \neq 0}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}J^{vw}K^{vw} \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} A_\theta &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2 \\ \mathfrak{A}(v,w) \neq \phi}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}K^{vw}, \\ D_\theta &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2, v \neq w \\ \#\mathfrak{A}_{vw}\#\mathfrak{A}_{w,v} \neq 0}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}J^{vw}K^{vw} \end{aligned}$$

とおくと, A_θ, D_θ はそれぞれ“重み付き隣接行列”, “重み付き次数行列”と呼ぶにふさわしい行列となっている. 以上の結果から, 次の定理が得られる.

定理 1 (石川, 森田, 佐藤)**.** 一般有限有向グラフ Δ 上の一般佐藤ゼータの伊原表示は以下で与えられる*:*

$$Z_\Delta(t) = \frac{1}{\det(I + tJ)\det(I - tA_\theta + t^2 D_\theta)}$$

これが冒頭に述べた既存のグラフゼータ関数の伊原表示を一般化した表示である.

参考文献

[1] Y. Ihara. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18(3):219–235, 1966.

[2] N. Konno and I. Sato. On the relation between quantum walks and zeta functions. *Quantum Information Processing*, 11(2):341–349, 2012.

[3] H. Mizuno and I. Sato. Weighted zeta functions of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 91(2):169–183, 2004.

[4] H. Morita. Ruelle zeta functions for finite digraphs. *preprint*.

[5] I. Sato. A new bartholdi zeta function of a graph. *Int. J. Algebra*, 1:269–281, 2007.