有限体上の概均質ベクトル空間におけるFourier変換

石本 和基 (Kazuki Ishimoto)
神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻 D2

1 はじめに

K を体, $\overline{K}$ を K の代数閉包とする. V を K 上の有限次元ベクトル空間とし, K 上の簡約代数群 G が V に作用しているとする. $V(\overline{K})$ の $G(\overline{K})$-軌道で, Zariski 位相で稠密であるものが存在するとき, (G, V) を概均質ベクトル空間という. 概均質ベクトル空間における Fourier 変換は, ゼータ関数の関数等式の決定や代数体に関する密度定理に深い関係があり, 整数論において重要な研究対象である. 例えば, 谷口氏と Thorne 氏により次の密度定理が示されている.

定理 1 ([1])**.** 3 次体 F の判別式を $\mathrm{Disc}(F)$ とし, $X \in \mathbb{R}$ に対して $N_3^{\pm}(X)$ を $0 < \pm\mathrm{Disc}(F) < X$ を満たす F の個数とする. $K^+ = 1, K^- = \sqrt{3}, C^+ = 1, C^- = 3$ とすると, 次が成り立つ.

$$N_3^{\pm}(X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K^{\pm}\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon})$$

この定理は概均質ベクトル空間 $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ (p は素数) における Fourier 変換の値を用いて証明される. 概均質ベクトル空間が有限体上で定義されているとき, その Fourier 変換は指数和の形で表される. 筆者は有限体上の概均質ベクトル空間における Fourier 変換の研究を行っている. 谷口氏と Thorne 氏による先行研究 ([2]) では, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$ における Fourier 変換の明示公式が与えられた. 筆者は他のいくつかの概均質ベクトル空間において, 軌道と部分空間の共通部分の元の個数を数えることにより, Fourier 変換の明示公式を求めた. 本稿では明示公式の求め方と, 著者の研究結果について述べる.

1.1 Fourier 変換

p を奇素数, $\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^n$ の有限体とする. V を $\mathbb{F}_q$ 上の有限次元ベクトル空間とし, 有限群 G が V に線型に作用しているとする. そして (G, V) が以下の条件を満たしているとする.

条件 2. G の位数 2 の自己同型 $\iota : G \ni g \mapsto g^{\iota} \in G$ と V 上の双線型形式 $\beta : V \times V \mapsto \mathbb{F}_q$ で, 次を満たすものが存在する.

$$\beta(gx, g^{\iota}y) = \beta(x, y) \quad (x, y \in V, g \in G)$$

関数 $\phi : V \to \mathbb{C}$ に対して, その Fourier 変換 $\widehat{\phi} : V \to \mathbb{C}$ を以下で定義する.

$$\widehat{\phi}(y) := |V|^{-1}\sum_{x\in V}\phi(x)\exp\left(\frac{2\pi i\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\beta(x, y))}{p}\right) \tag{1}$$

ここで,

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$$

はトレース写像である. $\mathcal{F}_V^G$ を V 上の G-不変な $\mathbb{C}$ 値関数全体の集合, つまり

$$\mathcal{F}_V^G := \{\phi : V \to \mathbb{C} \mid \phi(gx) = \phi(x) \ \ (g \in G, x \in V)\}$$

とする. $\mathcal{F}_V^G$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる. $\phi(x) \in \mathcal{F}_V^G$ に対して, $\widehat{\phi}$ もまた $\mathcal{F}_V^G$ の元になる. さらに, Fourier 変換写像 $\mathcal{F}_V^G \ni \phi \mapsto \widehat{\phi} \in \mathcal{F}_V^G$ は線型写像になる. この写像の明示公式を求めることが目的である.

計算には以下の命題を用いる.

命題 3 ([2])**.** $\mathcal{O}_i\,(1 \leq i \leq r)$ を V の G-軌道とし, $e_i\,(1 \leq i \leq r)$ を $\mathcal{O}_i$ の指示関数とする. W を V の部分空間とし, $W^{\perp} := \{y \in V \mid \forall x \in W, \beta(x, y) = 0\}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W|}{|\mathcal{O}_i|} \widehat{e_i} = \frac{|W|}{|V|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W^{\perp}|}{|\mathcal{O}_i|} e_i$$

$e_1, \ldots, e_r$ は $\mathcal{F}_V^G$ の $\mathbb{C}$-基底となる. したがって $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_r}$ の Fourier 変換が求められれば, 任意の $\phi \in \mathcal{F}_V^G$ の Fourier 変換が求められる. 命題 3 より, V の部分空間を一つ選ぶと, $\widehat{e_i}$ と e_i の線型結合の等式を一つ得る. したがって r の相異なる部分空間を選び, 得られる r 個の等式が線型独立ならば, 明示公式が導かれる.

2 主結果

筆者は以下の概均質ベクトル空間について指数和を計算した.

(ア) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$

(イ) $V = \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 3 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(ウ) $V = \mathbb{F}_q^4 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 4 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(エ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^3$ (3 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(オ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ (2 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$

(カ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ (3 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{q^2})$

(キ) $V =$ binary tri-Hermitian form のなす空間, $G = \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^3})$

(ク) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^4)$ (4 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(ケ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^6)$ (6 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_6(\mathbb{F}_q)$

本稿では例として (ア) における結果についてのみ述べる.

$V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2, G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ とする. V の元 x を 2 次正方行列の対

$$(A, B) = (\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix})$$

と表すことにする. また, G の元 g を (g_1, g_2, g_3) と書く. G は V に

$$gx = (g_1 A g_2^T, g_1 B g_2^T) g_3^T$$

で作用している. V 上の双線型形式 β を

$$\beta((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = \mathrm{Tr}(A_1 A_2^T + B_1 B_2^T)$$

で定め, G の自己同型 ι を

$$(g_1, g_2, g_3)^\iota = ((g_1^T)^{-1}, (g_2^T)^{-1}, (g_3^T)^{-1})$$

で定める. この β と ι が条件 2 を満たすことは容易に確かめられる.

命題 4. V の軌道分解は以下のとおりである.

軌道	代表元	元の個数
$\mathcal{O}_1$	$(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$	1
$\mathcal{O}_2$	$(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$	$[1, 0, 3]$
$\mathcal{O}_3$	$(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$	$[2, 1, 2]$
$\mathcal{O}_4$	$(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$	$[2, 1, 2]$
$\mathcal{O}_5$	$(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$	$[2, 1, 2]$
$\mathcal{O}_6$	$(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$	$[3, 1, 3]$
$\mathcal{O}_7$	$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$	$\frac{1}{2}[2, 3, 3]$
$\mathcal{O}_8$	$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{bmatrix})$	$\frac{1}{2}[4, 3, 1]$

ただし, $[a, b, c] = (q-1)^a q^b (q+1)^c$ とし, μ_1, $\mu_0 \in \mathbb{F}_q$ は $X^2 + \mu_1 X + \mu_0 \in \mathbb{F}_q[X]$ が既約になるようなものとする.

選んだ部分空間は以下のとおりである.

$$W_1 = 0, W_2 = (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}), W_3 = (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}), W_4 = (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}),$$

$$W_5 = (\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}), W_6 = (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}), W_7 = (\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}), W_8 = V$$

ここで, 例えば, $(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix})$ は $\left\{ (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}) \in V \,\middle|\, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{F}_q \right\}$ を表す.

直交補空間は $W_1^\perp = W_8$, $W_2^\perp = W_7$, $W_3^\perp = W_3$, $W_4^\perp = W_4$, $W_5^\perp = W_5$, $W_6^\perp = W_6$ となっている.

命題 5. 各軌道と各部分空間の共通部分の元の個数 $|\mathcal{O}_i \cap W_j|$ は以下で与えられる.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8
$\mathcal{O}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{O}_2$	0	$[1,0,1]$	$[1,0,2]$	$[1,0,2]$	$[1,0,2]$	$[1,0,0](3q+1)$	$[1,0,1](2q+1)$	$[1,0,3]$
$\mathcal{O}_3$	0	0	$[2,1,1]$	0	0	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_4$	0	0	0	$[2,1,1]$	0	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_5$	0	0	0	0	$[2,1,1]$	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_6$	0	0	0	0	0	$[3,1,0]$	$[3,1,1]$	$[3,1,3]$
$\mathcal{O}_7$	0	0	0	0	0	0	$[2,3,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,3]$
$\mathcal{O}_8$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[4,3,1]$

これらの結果を命題 3 に適用することで, Fourier 変換の明示公式を得る.

定理 6. 基底 $e_1, ..., e_8$ における Fourier 変換写像の表現行列は以下で与えられる.

$$\frac{1}{q^8}\begin{pmatrix}
1 & [1,0,3] & [2,1,2] & [2,1,2] & [2,1,2] & [3,1,3] & \frac{1}{2}[2,3,3] & \frac{1}{2}[4,3,1] \\
1 & c_1 & [1,1,0]b_1 & [1,1,0]b_1 & [1,1,0]b_1 & -[2,1,0]a_1 & \frac{1}{2}[1,3,0]b_2 & -\frac{1}{2}[3,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & qc_2 & -[1,1,1] & -[1,1,1] & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & -[1,1,1] & qc_2 & -[1,1,1] & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & -[1,1,1] & -[1,1,1] & qc_2 & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & -a_1 & q & q & q & qc_3 & -\frac{1}{2}[1,3,0] & -\frac{1}{2}[1,3,0] \\
1 & b_2 & -[1,1,0] & -[1,1,0] & -[1,1,0] & -[2,1,0] & q^3 & 0 \\
1 & -[0,0,2] & [0,1,1] & [0,1,1] & [0,1,1] & -[0,1,2] & 0 & q^3
\end{pmatrix}$$

ここで, $[a,b,c] = (q-1)^a q^b (q+1)^c$, $a_1 = 2q+1$, $b_1 = q^2-q-1$, $b_2 = q^2-2q-1$, $c_1 = 2q^3-2q-1$, $c_2 = q^3-q^2+1$, $c_3 = q^3-q^2-1$ とする.

参考文献

[1] T. Taniguchi and T. Frank, Secondary terms in counting functions for cubic fields, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508.

[2] T. Taniguchi and T. Frank, Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces, preprint, 2016, arXiv:1607.07827.