

Graded $\mathbb{E}_\infty$ -rings and projective spectral schemes

信州大学理学部 博士研究員

小原 まり子 / Mariko Ohara

本研究は $\mathbb{E}_\infty$ -環上に次数 (特に $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$) の概念を適切に定義し, 射影スペクトラルスキームを開被覆により定式化し, 最終的に Serre の定理を証明するものである. しかし今回のテクニカルレポートでは余白が狭すぎるため, 次数付き加群までを説明する.

次数付き $\mathbb{E}_\infty$ -環というのは, 学部生を経た人は概ね知っている存在である. 今回の研究は, 次数付きという概念を一般の圏に定義するのに, 何が適切なのかを考えた, というものである.

その結果, 対称モノイダル圏 $\{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ から得られる無限オペラドと, そこからの関手のなす無限圏に Day convolution を入れたものを用いるのが良いことに気が付いた. そして我々はその無限圏に於いて, 次数 0 への制限および一元局所化が $\mathbb{E}_\infty$ -環構造を落とさずに定式化出来ることを示した. また, この結果は古典の場合においても (次数付き環や加群を元を用いて表示しないという意味で) 今までの理論の refinement を与えている.

1 無限圏とその写像空間

$n \geq 0$ に対し, $[n]$ を有限順序集合 $\{0, \dots, n\}$ とする. 射 $[m] \rightarrow [n]$ は順序を保つ射とする. Δ を対象は有限順序集合, 射は順序を保つ射からなる圏とする.

Δ^{op} を Δ の反対圏とする. 単体的集合とは反変関手 $S : \Delta^{op} \rightarrow \text{Sets}$ のことである, ここで Sets は $\mathbb{U}$ -small な集合のなす圏である. S の n -単体を S_n とかく.

順序を保つ写像 $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$

$$d^i(k) = \begin{cases} k & (k < i), \\ k+1 & (k \geq i). \end{cases}$$

から決まる射 $d_i : S_n \rightarrow S_{n-1}$ を face という.

順序を保つ写像 $s^i : [n+1] \rightarrow [n]$

$$s^i(k) = \begin{cases} k & (k \leq i), \\ k-1 & (k > i). \end{cases}$$

から決まる射 $s_i : S_n \rightarrow S_{n+1}$ を degeneracy という.

我々は Set_Δ という記号で単体的集合のなす圏を考える.

T, S, M, N を単体的集合とする. 次の実線からなる図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & S \\ \downarrow p & \nearrow & \downarrow q \\ N & \longrightarrow & M. \end{array}$$

$p : T \rightarrow N$ (resp. $q : S \rightarrow M$) が q (resp. p) に対して左 (resp. 右) 持ち上げ性質を持つとは破線の矢印があり, 図式が可換になるときに言う.

Definition 1.1 (cf. [2], Definition 1.1.2.4). S と M を単体的集合とする. $p : S \rightarrow M$ を単体的集合の間の射とする. S が無限圏とは以下の実線の図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & S \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n, & & \end{array}$$

に対して破線の矢印が存在し, 図式が $0 < i < n$ に対して可換になること. S が Kan 複体であるとは上の実線の図式に対して破線の矢印が $0 \leq i \leq n$ の範囲で存在し図式が可換になるときに言う.

Example 1.2. Kan 複体は定義より勿論無限圏であるが, 通常圏のナーブは無限圏である.

さて無限圏は単体的集合の一種であった. しかし圏というからにはその頂点を対象とみなし何か写像の族を考えたい. その写像の族は高次の射の構造も持っているべきである.

単体的集合 S とその頂点 x と y に対し, 単体的集合 $\text{Map}_S(x, y)$ を以下のように定義する.

Definition 1.3 (無限圏における写像空間). S を単体的集合とし S^{Δ^1} を $[n]$ を $\text{Hom}_{\text{Set}_\Delta}(\Delta^1 \times \Delta^n, S)$ に送る対応により定まる単体的集合とする. $s, t : [0] \rightarrow [1]$ を $s(0) = 0$ と $t(0) = 1$ により定まる写像とする. 頂点 $x, y \in S$ をとる. x から y への写像空間 $\text{Map}_S(x, y)$ を以下の pullback で定める;

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_S(x, y) & \longrightarrow & S^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow (s, t) \\ * & \xrightarrow{(x, y)} & S \times S, \end{array}$$

ここで射の組 (s, t) は, $\text{Hom}_{\text{Set}_\Delta}(\{0\} \times \Delta^n, S)$ を第一成分の n -単体 S_n に送り $\text{Hom}_{\text{Set}_\Delta}(\{1\} \times \Delta^n, S)$ を第二成分の n -単体 S_n に送るもので, 射 (x, y) は $*$ を $(x, y) \in S \times S$ に送るものである.

もし S が無限圏なら $\text{Map}_S(x, y)$ は Kan 複体になる.

2 対称モノイダル圏と無限オペラド

$\langle n \rangle = \{*, 1, 2, \dots, n\}$ とする. $\mathcal{F}\text{in}_*$ を基点付き有限集合とする. $\langle n \rangle$ の基点は $*$. $\mathcal{F}\text{in}_*$ の射とは基点付き有限集合の射, 基点を保つ射のことである.

対称モノイダル無限圏とは余カルテジアンファイブレーション $p: \mathcal{C}^\otimes \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}\text{in}_*)$ で, Segal 条件を満たすもののことを言う [3, Definition 2.0.0.7].

Example 2.1. 一点からなる対称モノイダル圏 $[0]$ を考えよう. この積構造は $\{0\} \subset \mathbb{Z}$ を対称モノイダル圏の充満部分圏と見た時に入れることが出来る. 包含写像 $\{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ は対称モノイダル関手になっている. このとき, 我々は忘却関手により $[0]$ から Segal category $\mathcal{F}\text{in}_*$ へ圏同型を得る.

Example 2.2. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ および整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は足し算 $+$ により対称モノイダル圏とみなすことが出来る. ここで, 射は同型射に限ることとする.

対称モノイダル無限圏 $p: \mathcal{C}^\otimes \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}\text{in}_*)$ に対して そこにおける可換環対象を, p の切断で惰性射を惰性射に移すものと定める [3, Definition 2.1.2.7].

Remark 2.3 ([3], Remark 2.0.0.5, Construction 2.1.1.7). 対称モノイダル圏から無限オペラドを作る手順がある. $(\mathcal{C}, \otimes)$ を対称モノイダル圏とする. このとき新たな圏 $\mathcal{C}^\otimes$ を次のように定義する [3, 2.0.0.1, Example 2.1.1.5]

$$\text{Mule}(\{X_i\}_{i \in I}, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\otimes_{i \in I} X_i, Y).$$

一般的な射の族の構成 [3, Construction 2.1.1.7] より, 縁付きオペラド $\mathcal{O}$ から新たな圏 $\mathcal{O}^\otimes$ ができる.

Definition 2.4. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ および整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は足し算 $+$ により対称モノイダル圏とみなすことが出来る. ここで, 射は同型射に限ることとする. 射の集合を $\text{Mul}(\{X_i\}_{i \in I}, Y) = \text{Hom}(\otimes_{i \in I} X_i, Y)$ と定める. Remark 2.3 よりこの対称モノイダル圏が

ら縁付きオペラドができる. そして縁付きオペラドのナーブを取ることで対称モノイダル無限圏 $N_\Delta(\mathcal{O}_\mathbb{N}^\otimes) \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}in_*)$ と $N_\Delta(\mathcal{O}_\mathbb{Z}^\otimes) \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}in_*)$ が得られる. これは本稿で用いる無限オペラドの一種である. またそのベースとなる無限圏は $N_\Delta(\mathbb{N})$ および $N_\Delta(\mathbb{Z})$ となる.

2.1 $\text{Fun}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \text{Sp})$ 上の積構造; Day convolution

ここで無限圏上の Day convolution について復習する.

Definition 2.5. $\mathcal{C}^\otimes \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}in_*)$ を対称モノイダル無限圏とする. 関手 $N_\Delta(\mathbb{Z})$ から $\mathcal{C}$ へのなす無限圏 $\text{Fun}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathcal{C})$ を考える.

[8, Proposition 2.11] における構成および [8, Lemma 2.13] より, 我々は $N_\Delta(\mathcal{O}_\mathbb{Z}^\otimes)$ と $\mathcal{C}^\otimes$ の対称モノイダル構造と Day convolution $\hat{\otimes}$ による積を持つ, 対称モノイダル無限圏 $\text{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathcal{C})^{\hat{\otimes}} \rightarrow N_\Delta(\mathcal{F}in_*)$ を得る.

Proposition 2.6 ([8, Lemma 2.13]). 対称モノイダル圏 $\mathcal{C}^\otimes$ および $\mathcal{D}^\otimes$ のテンソル積が順極限と各成分ごとに可換ならば, $\text{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(\mathcal{C}, \mathcal{D})^{\hat{\otimes}}$ に入っている *Day convolution* もまた各成分ごとに順極限と可換になる.

Example 2.7. Mandell-May-Schwede-Shipley は $\mathcal{D}$ -スペクトラムの圏において対称モノイダル構造を定義している. それは Day convolution で与えられている (cf. [7, Definition 1.9, Definition 21.4]). この理論は $\mathbb{Z}$ で添字付けられたスペクトラム達の理論にも使える. またその積を coend で以下のように定義していた

$$(X \hat{\otimes} Y)_c = \int^{(c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \text{Hom}_\mathbb{Z}(c_1 + c_2, c) \otimes X_{c_1} \otimes Y_{c_2},$$

and the inner hom $[X, Y]_{\hat{\otimes}}$ by the end

$$([X, Y]_{\hat{\otimes}})_c = \int_{(c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \text{Map}(\text{Hom}_\mathbb{Z}(c_1 + c, c_2), \text{Map}(X_{c_1}, Y_{c_2})).$$

X を無限圏 $\text{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathcal{C})^{\hat{\otimes}}$ の対象とする. このとき記号 X_i により $i \in \mathbb{Z}$ における X の値を表すこととする.

3 次数 $\mathbb{Z}$ (または $\mathbb{N}$) $\mathbb{E}_\infty$ -環と 次数 $\mathbb{Z}$ 加群

我々は $\text{Alg}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{M})$ という記号を無限オペラドのファイブレーション $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}$ と無限オペラド $\mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ により得られる環対象に対して使う [3, Definition 2.1.3.1].

Definition 3.1. (i) 次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環のなす無限圏を

$$\text{Alg}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)/N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(\text{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \text{Sp})^{\hat{\otimes}}),$$

と定める. その対象を次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環という.

(ii) 包含写像 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ は対称モノイダル圏であった. 誘導された無限オペラドの射を $N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{N}}^{\otimes}) \rightarrow N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\otimes})$ とする. $\mathbb{E}_\infty$ -環 R に対し R 上の次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環とは

$$\text{Alg}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)/N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(\text{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}in_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \text{Mod}_R)^{\hat{\otimes}}).$$

さて, 我々が見知った次数付き環や加群は直和の格好をしていた. ところがいま扱っているのは関手である. 環っぽくはない. これを我々の見知った形に関連付けるのが次の命題である.

Definition 3.2. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\otimes}) & \xleftarrow{0} & N_\Delta(\mathcal{F}in_*) \\ \downarrow A & \nearrow A_0 & \\ \text{Sp}^{\otimes} & & \end{array} \quad .$$

$$\begin{array}{ccc} N_\Delta(\mathcal{F}in_*) & \xleftarrow{i} & N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\otimes}) \\ \searrow A(\infty) & & \downarrow A \\ & & \text{Sp}^{\otimes} \end{array} \quad .$$

ここで 0 は対称モノイダル包含写像 $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ で $\mathbb{Z}$ の部分と同一視している. また i は無限オペラドの構造射である. ここで $A(\infty)$ は i に沿った A のオペラディックな左 Kan 拡張より得られた. また A_0 は 0 との合成により得られる.

このとき

Proposition 3.3. A が次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環なら,

(i) A_0 は $\mathbb{E}_\infty$ -環,

(ii) $A(\infty)$ は $\mathbb{E}_\infty$ -環.

とくに $(-)_0$ は積と可換.

Definition 3.4. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環 A と $\mathbb{E}_\infty$ -環 R に対して,

(i) 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A -加群のなす無限圏を

$$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}_{\mathrm{in}}^*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathrm{Sp})^{\hat{\otimes}}),$$

(ii) 同様に R 上の次数 $\mathbb{Z}$ 付き A -加群のなす無限圏を

$$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}_{\mathrm{in}}^*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathrm{Mod}_R)^{\hat{\otimes}})$$

と定める.

Remark 3.5. Day convolution はフィルター付き順極限と成分ごとに可換なため我々は弱対称モノイダル関手 $\mathrm{Mod}^{A\mathrm{gr}\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{Mod}_{A(\infty)}$ を得る, 即ち, 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A -加群は $A(\infty)$ -加群 $M(\infty)$ を与える.

3.1 有限表示条件

まずは $\mathbb{E}_\infty$ -環上の加群に対する条件の定義を振り返る.

(i) $\mathbb{E}_\infty$ -環 R が接続とは任意の $\pi_0 R$ のイデアルが有限表示かつ $\pi_n R$ が $\pi_0 R$ 上有限表示加群.

(ii) R を接続 $\mathbb{E}_\infty$ -環とする. R 加群 M が準完全とは $\pi_i M \simeq 0$ が十分小さい $i \in \mathbb{Z}$ で成り立つ事であり, かつ $\pi_n M$ が $\pi_0 R$ 上有限表示加群である事である.

(iii) 接続 $\mathbb{E}_\infty$ -環上の加群 M が完全とは準完全かつ有限 Tor 次元を持つ事である. ここで $\mathbb{E}_\infty$ -環 R 上の加群が有限 Tor 次元を持つとはある整数 n が存在し, 任意の $\pi_k(N) \neq 0$ なる R 加群 N に対し $k \geq n$ なら $\pi_k(M \otimes_R N) = 0$.

A を次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環とする. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群 M が局所完全とは $\pi_0 A$ の斉次元 a に対し任意の $M[a^{-1}]_0$ が完全 $A[a^{-1}]_0$ 加群である事.

Definition 3.6 (有限表示条件). $\mathbb{E}_\infty$ -環 R 上の次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環 A と R 上の次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群が有限表示条件を満たすとは

- (i) A は次数 $\mathbb{N}$ コンパクト R -加群; 即ち各 A_i がコンパクトスペクトラムで, 更に局所完全かつ連結な $\mathbb{E}_\infty$ -環. ここで R は正則 $\mathbb{E}_\infty$ -環.
- (ii) ある $x_1, \dots, x_n$ が存在してファイブレーション $A_0\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \text{Sym}_{A_0}(A_1)$ が取れる. ここで x_i は $A_0\{x_1, \dots, x_n\}$ の頂点で $\pi_0(A_0\{x_1, \dots, x_n\}) \simeq \pi_0(A_0)[x_1, \dots, x_n]$ の不定元に対応するもの.
- (iii) ファイブレーション $\text{Sym}_{A_0}(A_1) \rightarrow A(\infty)$ が存在する.
- (iv) 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群 M が局所コンパクトとはある $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在し, M を与える関手との合成 $N_\Delta(\mathbb{Z}_{\geq n_0}) \rightarrow N_\Delta(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}$ が局所完全であるときに言う. ここで, $N_\Delta(\mathbb{Z}_{\geq n_0})$ とは $N_\Delta(\mathbb{Z})$ の充満部分無限圏であって頂点 $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ で生成されているものである. $\text{Mod}_R^{f\text{cpt}, \text{Agr}\mathbb{Z}}$ を上述の R 上の次数 $\mathbb{N}$ コンパクト $\mathbb{E}_\infty$ -環上の局所コンパクト次数 $\mathbb{Z}$ コンパクト A 加群のなす無限圏とする.

k を体とする. Eilenberg-MacLane スペクトラム Hk は接続 $\mathbb{E}_\infty$ -環. 更に正則である. 従って Hk 上の準完全な加群は完全である.

球面スペクトラム上の完全加群の K 理論と接続加群の K 理論一致しないため, 球面スペクトラム $\mathbb{S}$ は正則ではない.

この条件のもと, 我々は代数幾何学において Serre の定理と呼ばれる定理 (Proposition 3.7) の, 無限圏への一般化を考えた. この非可換幾何学においても Serre の定理の類似の結果が得られている.

k を体, A を k 上有限型の可換環とする. この時 A 加群の圏は $\text{Spec } A$ 上の準接続加群層に同値である事はよく知られていた.

Proposition 3.7. k 上有限生成で更に A は A_0 上 A_1 で生成されている可換次数付き環 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ の場合は $\text{Proj } A$ 上の準接続層の圏は準有限次数付き A 加群の圏を有限個の 0 でない正の因子を持つ A 加群のなす部分圏で割った圏と圏同値である.

我々は無限圏の設定のもと以下の定理を得た.

Theorem 3.8 (主結果). R を $\mathbb{E}_\infty$ -環とし A を R 上の次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$ -環とする. 有限表示条件が成り立つと仮定する. $\text{Mod}_R^{f\text{cpt}, \text{Agr}\mathbb{Z}}$ を局所完全で R 上 $\mathbb{Z}$ -コンパクトな次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群のなす無限圏とする. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き加群の射のクラスで十分大きな正の因子に対して同値を誘導するものを考え, Dwyer-Kan 局所化を考える. その無限圏を $\text{Mod}_R^{f\text{cpt}, \text{Agr}\mathbb{Z}} / \text{Nil}_R^A$

と置く事にする. この時, $\mathcal{F}$ を大域切断の *Serre* 捻りに関する余積 $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathrm{Proj} A, \mathcal{F}[n])$ に送る関手

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj} A)^{perf} \rightarrow \mathrm{Mod}_R^{fcp, Agr\mathbb{Z}} / \mathrm{Nil}_R^A$$

は無限圏の同値を与える.

参考文献

- [1] B Day, *On closed categories of functors*, Lecture notes in Math. **137** (1970), 1–38.
- [2] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.
- [3] ———, *Higher algebra*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2011).
- [4] ———, *Rotation invariance in algebraic K-theory*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2015).
- [5] ———, *Spectral Schemes*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2011).
- [6] ———, *Spectral Algebraic Geometry*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2017).
- [7] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, and B. Shipley, *Model categories of diagram spectra*, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), no. 2, 441–512.
- [8] S. Glasman, *Day convolution for ∞ -categories*, Preprint, available at arXiv : 1308.4940v4 (2016).
- [9] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278 (French).
- [10] A. B. Verëvkin, *Injective Serre sheaves*, Mat. Zametki **52** (1992), no. 4, 35–41, 128 (Russian, with Russian summary); English transl., Math. Notes **52** (1992), no. 3-4, 1016–1020 (1993).