

Metric algebroid における Double 構造

北里大学大学院理学研究科分子科学専攻

森 遥 (Haruka MORI)

概要

Metric algebroid とは, Courant algebroid の拡張として定義される新しい代数構造であり, 物理的には Double Field Theory (DFT) におけるゲージ対称性と関連する事が知られている. 本研究では, metric algebroid が Courant algebroid を経由しなくても 2 つの Lie algebroid から直接構成できることを新たに確かめた. また, この 2 つの Lie algebroid は Lie bialgebroid から derivation 条件を緩めたものである事がわかった.

1 はじめに

弦理論は, 「物理現象を記述する基本要素は, 1 次元の広がりを持った弦である」という仮定のもとで考えられた理論であり, 量子化された重力を記述する理論の有力な候補として非常に重要な理論である. 弦理論の大きな特徴としては, T 双対性の存在があげられる. これは, 弦が円周にコンパクト化された空間に巻きつけられることに由来し, 巻きついた弦の半径を R として組み立てても, その逆数 $1/R$ として組み立てても同じ理論が得られるということを意味している.

Double Field Theory (DFT) は, T 双対性を明示的に含んだ重力理論である. これは, 通常は d 次元の時空座標を, 倍の $2d$ 次元にすることで実現されている. DFT におけるゲージ対称性の記述方法は, 主に [1, 2] で調べられており, C-bracket と呼ばれる括弧積が与えられている.

C-bracket の特徴は, **Jacobi 恒等式を満たさない**という点である. したがって, DFT のゲージ対称性の背景にある代数構造は, 少なくとも Lie algebra ではない別の構造である. C-bracket によって生成される数学的構造が何であるかについては主に [3, 4, 5] で議論されており, [5] の著者である Vaisman は, この構造を metric algebroid と呼んでいる. 詳細は後述するが, metric algebroid は Courant algebroid を定義する関係式のうち, いくつかを緩めたものとして定義される.

Metric algebroid は, 本来は物理的な需要から提示された構造であり, 数学として他の構造との間にどのような関係があるのかはあまり調べられてこなかった. Metric algebroid を定義する際に基礎となる Courant algebroid に立ち返ってみると, Courant algebroid は, Lie bialgebroid の Drinfel'd double として得られる構造であることが示されている [6]. これは, Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ の Drinfel'd double として Lie algebra $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ を構成する一連の手順を, Lie bialgebroid の場合へと一般化したものである. したがって, metric algebroid も, 何らかの algebroid の double として得られるのではないかと考えられる. 本研究では, metric algebroid が, 2 つの Lie algebroid (注: Lie bialgebroid ではない) の double によって与えられることを明らかにした.

本稿では、はじめに基本となる Lie bialgebra やその Drinfel'd double についてまとめる。次に、Lie (bi)algebroid と Courant algebroid の定義を与え、Lie bialgebroid の Drinfel'd double について述べる。最後に、本題となる metric algebroid と、その背景にある algebroid 構造について述べる。

2 Lie bialgebra と Drinfel'd double

2.1 Lie bialgebra

V をベクトル空間, $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ を反対称で双線型な括弧積 (Lie bracket) として, 体 K 上の Lie algebra (代数) $\mathfrak{g}$ を $(V, [\cdot, \cdot])$ で与える。このとき, Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ は **Jacobi** 恒等式を満たしている。 V がベクトル空間であることから, その双対空間 V^* に対しても, 双対な Lie bracket $[\cdot, \cdot]^*$ を与えることで, $\mathfrak{g}$ と双対な Lie algebra $\mathfrak{g}^*$ を定義することができる。また, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の間に自然に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義できる。

$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ の co-bracket を $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ とする。 δ が以下の 1-cocycle 条件を満たすのであれば, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta)$ は Lie bialgebra となる。ただし, $x, y \in \mathfrak{g}$ であり, ad_x は x の adjoint 表現^{*1}である:

$$\delta([x, y]) = \text{ad}_x^{(2)}\delta(y) - \text{ad}_y^{(2)}\delta(x). \quad (1)$$

$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta)$ が揃っていれば, $(\mathfrak{g}^*, [\cdot, \cdot]^*, \mu^*)$ は内積を通して誘導できるので, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta)$ だけで Lie bialgebra を定義できる^{*2}。また, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta)$ が Lie bialgebra であれば, $(\mathfrak{g}^*, [\cdot, \cdot]^*, \mu^*)$ も Lie bialgebra である。言い換えれば, $[\cdot, \cdot]^*$ の co-bracket を考えても Lie bialgebra を与えられる^{*3}。以降, Lie bialgebra のことを $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ と表記する。

2.2 Drinfel'd double

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の直和 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ を考える。 $x, y \in \mathfrak{g}, \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ としたとき, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上に非退化な双線型形式 $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow K$ を

$$(x, y) = (\xi, \eta) = 0, \quad (x, \xi) = \langle x, \xi \rangle. \quad (2)$$

のように定義できる。また, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を subalgebra とするような Lie algebra $\mathfrak{d}$ を定義できる。 $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{d}}$ は次のように与えられる^{*4}:

$$[x, y]_{\mathfrak{d}} = [x, y], \quad [\xi, \eta]_{\mathfrak{d}} = [\xi, \eta]^*, \quad [x, \xi]_{\mathfrak{d}} = -\text{ad}_{\xi}^*x + \text{ad}_x^*\xi. \quad (3)$$

$(\cdot, \cdot)$ は $\mathfrak{d}$ 上の Lie bracket $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{d}}$ に対して不変であり, 次の式が成立する:

$$(x, [y, \xi]_{\mathfrak{d}}) = ([x, \xi]_{\mathfrak{d}}, y). \quad (4)$$

^{*1} $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ であり, $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{ad}_x(y) = [x, y]$.

^{*2} $[\cdot, \cdot]^*$ を δ の転置 $\delta^* : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ として与えればよい。

^{*3} $[\cdot, \cdot]^*$ の co-bracket として $\mu^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ を与え, その転置 μ として Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ を与えても Lie bialgebra $(\mathfrak{g}^*, [\cdot, \cdot]^*, \mu^*)$ を得ることができる。

^{*4} ad_{ξ}^* は, $\langle \text{ad}_{\xi}^*\eta, x \rangle = -\langle \eta, \text{ad}_{\xi}^*x \rangle$ となるように定義する。すなわち, $\text{ad}_{\xi}^*\eta = [\xi, \eta]^*$ 。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ に対して, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ に Lie bracket が定義されたものを $\mathfrak{g}$ の Drinfel'd double と呼び, 一般に $\mathfrak{d}$ や, $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ と表す. 本文中では $\mathfrak{d}$ と表記する. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*, \mathfrak{d})$ の組を Manin triple という.

3 Lie bialgebroid と Drinfel'd double

3.1 Lie algebroid

Lie algebroid は, 底空間 M と, その上のベクトル束 L , anchor map と呼ばれる写像 $a : L \rightarrow TM$ の組 (M, L, a) として定義される. 一般的に, あるベクトル束からベクトル場を取り出す操作は切断と呼ばれるが, これを本文中では Γ で表すことにする. TM の切断で得られるベクトル場 $\Gamma(TM)$ に対して, Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ が定義できるのと同じように, L の切断で得られるベクトル場 $\Gamma(L)$ に対して新たに Lie algebroid bracket $[\cdot, \cdot]_L$ を定義することができる. このとき, anchor map は $[\cdot, \cdot]$ に対して準同型である. すなわち, $[\cdot, \cdot]$ と $[\cdot, \cdot]_L$ は以下のように対応する. $X, Y \in \Gamma(L)$ とすると,

$$a[X, Y]_L = [a(X), a(Y)]. \quad (5)$$

また, $f \in C^\infty(M)$ とすると, $[\cdot, \cdot]_L$ における Leibnitz rule は以下のように定義される:

$$[X, fY]_L = f[X, Y]_L + (a(X)f)Y. \quad (6)$$

底空間 M が 1 点しかない多様体の場合, Lie algebroid は Lie algebra となる.

L に双対なベクトル束 L^* に対しても, 同様に (L と双対な) Lie algebroid を定義することができる. L^* 側で定義した Lie algebroid における anchor map を $a_* : L^* \rightarrow TM$, Lie algebroid bracket を $[\cdot, \cdot]_{L^*}$ と表記する. (5) と同様に, $\xi, \eta \in \Gamma(L^*)$ としたとき

$$a_*[\xi, \eta]_{L^*} = [a_*(\xi), a_*(\eta)] \quad (7)$$

が成立する. また, $[\cdot, \cdot]_{L^*}$ に対する Leibnitz rule は以下のように定義される:

$$[\xi, f\eta]_{L^*} = f[\xi, \eta]_{L^*} + (a_*(\xi)f)\eta. \quad (8)$$

Lie algebra の時と同様に, L と L^* の間には自然に内積が定義できる. また, $\Gamma(\wedge^p TM)$ や $\Gamma(\wedge^q T^*M)$ における (multi)vector や form の一般化として, $\Gamma(\wedge^p L)$ や $\Gamma(\wedge^q L^*)$ 上にも外積代数を考えることができる. Lie algebroid derivative $d : \Gamma(\wedge^p L^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{p+1} L^*)$ は以下のように定義される^{*5}. $\xi \in \Gamma(\wedge^p L^*), X_i \in \Gamma(L)$ とすると,

$$\begin{aligned} d\xi(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-)^{i+1} a(X_i) (\xi(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-)^{i+j} (\xi([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{p+1})). \end{aligned} \quad (9)$$

同様に, Lie 微分や内部積も定義でき, $\Gamma(\wedge^p L^*)$ 上の外積代数は $\Gamma(\wedge^q T^*M)$ 上の外積代数とほとんど同じように扱うことができる.

^{*5} 双対な Lie algebroid derivative $d_* : \Gamma(\wedge^p L) \rightarrow \Gamma(\wedge^{p+1} L)$ も同様に与えられる.

3.2 Lie bialgebroid

Lie algebroid と, 双対な Lie algebroid の組 (L, L^*) に対して, Lie bialgebroid を定義できる. (L, L^*) が Lie bialgebroid であれば, 以下の derivation 条件を必ず満たす^{*6}. これは, Lie bialgebra における 1-cocycle 条件 (1) に対応する:

$$d_*[X, Y]_L = [d_*X, Y]_L + [X, d_*Y]_L. \quad (10)$$

底空間 M が 1 点しかない多様体の場合, Lie bialgebroid は Lie bialgebra となる.

3.3 Courant algebroid

Courant algebroid は, 底空間 M 上の ベクトル束 E に対して, 以下の 5 つの関係式

$$[[e_1, e_2]_C, e_3]_C + \text{c.p.} = \mathcal{D}T(e_1, e_2, e_3); \quad (\text{i})$$

$$\rho[e_1, e_2]_C = [\rho(e_1), \rho(e_2)]; \quad (\text{ii})$$

$$[e_1, fe_2]_C = f[e_1, e_2]_C + (\rho(e_1)f)e_2 - (e_1, e_2)_+ \mathcal{D}f; \quad (\text{iii})$$

$$(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g) = 0; \quad (\text{iv})$$

$$\rho(e)(h_1, h_2) = ([e, h_1]_C + \mathcal{D}(e, h_1), h_2) + (h_1, [e, h_2]_C + \mathcal{D}(e, h_2)) \quad (\text{v})$$

を満たすような,

1. 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot, \cdot)_+$,
2. 括弧積 $[\cdot, \cdot]_C$,
3. anchor map $\rho : E \rightarrow TM$

の組 $(E, (\cdot, \cdot)_+, [\cdot, \cdot]_C, \rho, M)$ として定義される. (i) は, 括弧積の Jacobi 恒等式が 0 にならないという性質を表し, Lie algebra (あるいは Lie algebroid) とは明らかに異なる構造であることを示している. (ii) は, ρ が $\Gamma(TM)$ 上の Lie 代数に対して準同型であることを意味する. (iii) は Leibnitz rule を表している. (v) は, 双線型形式と anchor map が両立することを意味する.

Courant algebroid は, そのひとつの実例として, Lie bialgebroid の Drinfel'd double によって得られる構造であることが知られている [6]. Lie bialgebra の時と同様に, L と L^* の直和により新たなベクトル束 $E = L \oplus L^*$ を導入する. $e_i \in \Gamma(E)$, すなわち $e_i = X_i + \xi_i$ としたとき, $\Gamma(E)$ 上の非退化な双線型形式 $(\cdot, \cdot)_\pm$ は

$$(e_1, e_2)_\pm = \frac{1}{2}(\langle \xi_1, X_2 \rangle \pm \langle \xi_2, X_1 \rangle) \quad (11)$$

のように定義される. ρ は以下のように定義する:

$$\rho(e_i) = a(X_i) + a_*(\xi_i). \quad (12)$$

また, $\mathcal{D} : C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(E)$ は

$$(\mathcal{D}f, e_i) = \frac{1}{2}\rho(e_i)f \quad (13)$$

^{*6} この条件は $[\cdot, \cdot]_{L^*}$ 側で定義してもよい. (10) 式は, $d[\xi, \eta]_{L^*} = [d\xi, \eta]_{L^*} + [\xi, d\eta]_{L^*}$ と等価である.

のように定義する．上述の ρ の定義と合わせると， $\mathcal{D} = d + d_*$ と表すことができる．この場合の Courant algebroid を定義する括弧積として，Courant bracket $[\cdot, \cdot]_C$

$$[e_1, e_2]_C = [X_1, X_2]_L + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - d_*(e_1, e_2) - \\ + [\xi_1, \xi_2]_{L^*} + \mathcal{L}_{X_1} \xi_2 - \mathcal{L}_{X_2} \xi_1 + d(e_1, e_2) - . \quad (14)$$

を導入する．この括弧積は，[6] で与えられたものであり，C-bracket と形式的には同じ形である*7． $(L, L^*, L \oplus L^*)$ の組は，上述の Lie algebra での Manin triple の，algebroid への拡張となっている．

4 metric algebroid

Metric algebroid は，2012 年に Vaisman によって提唱された新しい algebroid 構造である [5]．Courant algebroid と比較すると，

1. 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot, \cdot)_+$ ，
2. 括弧積 $[\cdot, \cdot]_V$ ，
3. anchor map $\rho : E \rightarrow TM$

の組 $(E, (\cdot, \cdot)_+, [\cdot, \cdot]_V, \rho, M)$ として定義される点は同じだが，これらが満たす関係式は前述の Courant algebroid を定義する関係式のうち，(iii) と (v) の 2 式のみでよい．この意味で Courant algebroid をさらに一般化したものであると捉えることができる．

5 結果

まず， $[e_1, e_2]_C$ に基づいて Courant algebroid の関係式を改めて確認してみると，各関係式を導く過程で，derivation 条件を使うものと使わないものに分けることができた．具体的には，関係式 (i)，(ii) と (v) を導く過程では derivation 条件を必ず用いており，(iii) と (v) は derivation 条件とは無関係な条件式である．metric algebroid が満たすべき関係式は (iii) と (v) となっていることから，図 1 に示すように，その double が metric algebroid になるような algebroid は，Lie bialgebroid から derivation 条件だけを緩めたような 2 つの Lie algebroid の組であることがわかった．したがって，metric algebroid を定義する際に必要となる括弧積は，(14) で例示した Courant bracket と全く同じ形となる．表記上 metric algebroid の括弧積であると明確にするために， $[\cdot, \cdot]_V$ と表す．その具体的な表記は

$$[e_1, e_2]_V = [X_1, X_2]_L + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - d_*(e_1, e_2) - \\ + [\xi_1, \xi_2]_{L^*} + \mathcal{L}_{X_1} \xi_2 - \mathcal{L}_{X_2} \xi_1 + d(e_1, e_2) - . \quad (15)$$

のように与えられる．この 2 つの Lie algebroid と metric algebroid の組は，Manin triple のさらなる一般化とみることができる．

*7 この括弧積は，時系列としては先に [6] で定義された．Courant algebroid の歴史に関しては，[7] にまとめられている．

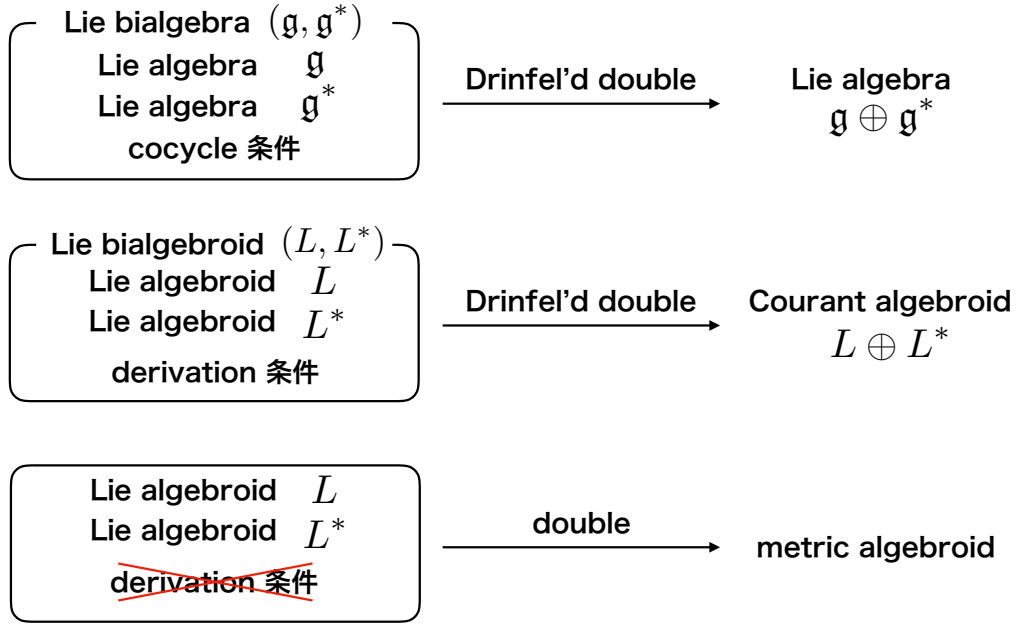


図1 ここまでの algebra や algebroid のつながりを図にするとこのようになる．double をとることで metric algebroid を構成するような別の構造がないのかを調べた結果，鍵は derivation 条件の有無にあることが明らかとなった．

また，この結果に関連して，実際に DFT における C-bracket が metric algebroid の括弧積 $[\cdot, \cdot]_V$ そのものであることを示した．これは，metric algebroid が表れるひとつの例となっている．はじめに述べた通り，DFT のゲージ対称性は倍化された時空間上の C-bracket で記述される．倍化された時空間として，偶数次元の para-Hermitian 多様体 $\mathcal{M}$ を導入すると，para-complex 構造によって接束 TM は $L \oplus \tilde{L}$ の形に分割される． $L, \tilde{L}$ 上にはそれぞれ Lie algebroid を定義できるが，これらの Lie algebroid の間には derivation 条件は成立していないことが確かめられる．すなわち， $(L, \tilde{L})$ は Lie bialgebroid にはなっていない．したがって， $L \oplus \tilde{L}$ 上には metric algebroid を定義でき，C-bracket が生成する代数構造は metric algebroid であるといえる．加えて，これらの構造を手がかりに，DFT において強い拘束条件 (strong constraint) を課すということは，数学的にどのような操作に対応するのかを探ることができる．以上の議論は，[8] で行った．

参考文献

- [1] C. Hull and B. Zwiebach, “The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets,” *JHEP* **0909** (2009) 090 [[arXiv:0908.1792](#)].
- [2] O. Hohm and B. Zwiebach, “Large Gauge Transformations in Double Field Theory,” *JHEP* **1302** (2013) 075 [[arXiv:1207.4198](#)].
- [3] O. Hohm and B. Zwiebach, “Towards an invariant geometry of double field theory,” *J. Math. Phys.* **54** (2013) 032303 [[arXiv:1212.1736](#)].
- [4] A. Deser and C. Sämann, “Derived Brackets and Symmetries in Generalized Geometry and

- Double Field Theory,” *PoS CORFU* **2017** (2018) 141 [[arXiv:1803.01659](#)].
- [5] I. Vaisman, “On the geometry of double field theory,” *J. Math. Phys.* **53** (2012) 033509 [[arXiv:1203.0836](#)].
- [6] Z.-J. Liu, A. Weinstein and P. Xu, “Manin Triples for Lie Bialgebroids,” *J. Differential Geom.* **45** (1997) 547 [[arXiv:dg-ga/9508013](#)].
- [7] Y. Kosmann-Schwarzbach, “Courant Algebroids. A Short History,” *SIGMA* **09** (2013) 014 [[arXiv:1212.0559](#)].
- [8] H. Mori, S. Sasaki and K. Shiozawa, “Doubled Aspects of Vaisman Algebroid and Gauge Symmetry in Double Field Theory,” [arXiv:1901.04777](#).