

量子 Ising 模型における平均場臨界現象

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)^{*†}

概要

強磁性体の相転移を記述するモデルに古典 Ising 模型がある。量子 Ising 模型はこれのスピン変数を Pauli 行列で置き換え、横磁場を印加したモデルである。量子 Ising 模型の高次元臨界現象は温度を固定し相互作用係数や横磁場を変化させた場合について調べられている。一方で、温度を変化させた場合の振舞は知られていない。この問題について、講演者らは帯磁率に関する不等式を得た。なお、本研究は半田悟氏と坂井哲准教授（両北海道大学）との共同研究である。

1 導入

1.1 動機

水 (H_2O) は 0°C で氷に変化し、 100°C で水蒸気に変化する。これは相転移と呼ばれる現象の一例である。一般に、物質などの物理系のパラメータを操作することで、その巨視的な振る舞いが著しく変化する現象を相転移という。同様の現象は鉄やコバルトなどの強磁性体でも起こる。例えば、鉄 (Fe) は常温では強磁性を示す（平たく言えば、強い磁場を掛けることによって磁石になる）が、 770°C を境に常磁性を示す（磁石ではなくなる）。このような強磁性体の相転移を記述するモデルに Ising 模型がある。

古典 Ising 模型は有限格子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 上のスピン配置 $\sigma = \{\sigma_x\}_{x \in \Lambda} \in \{-1, +1\}^\Lambda$ が確率測度

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H^{\text{cl}}(\sigma)}}{\sum_{\tau \in \{-1, +1\}^\Lambda} e^{-\beta H^{\text{cl}}(\tau)}}, \quad \text{ここで } H^{\text{cl}}(\sigma) = - \sum_{x, y \in \Lambda} J_{x, y} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x \quad (1)$$

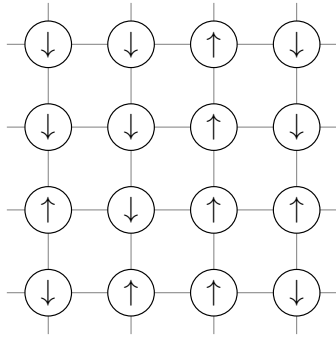
によってランダムに与えられるとするモデルである（図 1a）。ただし、相互作用係数 $J_{x, y}$ 、外部磁場の強さ h および逆温度 β は正の実数であり、 $H^{\text{cl}}(\sigma)$ を Hamiltonian 関数と呼ぶ。古典 Ising 模型は直感的には格子点の上に（上向きか下向きのみの）棒磁石のようなものが乗っていると思えばよい。その棒磁石の平均的な向き（磁化）を調べることによって、系がどの程度磁石になっているかがわかる。具体的には、確率測度 $\mathbb{P}$ による $A: \{-1, +1\}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ の期待値を

$$\langle\langle A \rangle\rangle_{\beta, h; \Lambda} = \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} A(\sigma) \mathbb{P}(\sigma)$$

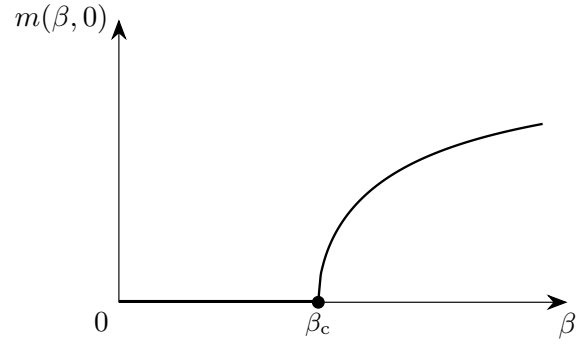
と定義し、自発磁化を $\lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) = |\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} \langle\langle \sigma_x \rangle\rangle_{\beta, 0; \Lambda}$ で定義する。温度を下げていったと

^{*} 北海道大学大学院理学院数学専攻博士後期課程

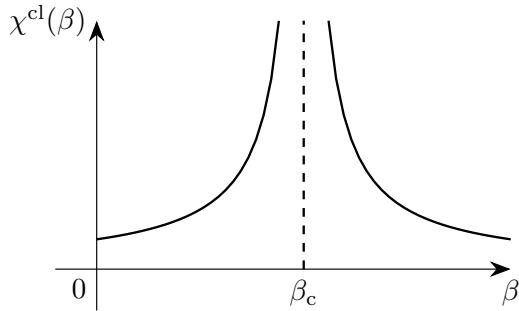
[†] kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp



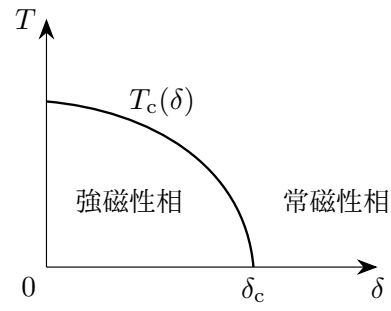
(a) Ising 模型の概念図. 上向きが $+1$, 下向きが -1 に対応する.



(b) 古典 Ising 模型での自発磁化の振る舞い. 臨界点を境に立ち上がる.



(c) 古典 Ising 模型での帯磁率の振る舞い. 臨界点で発散する.



(d) 量子 Ising 模型の相図. 温度変化のみでなく, 横磁場の变化でも相転移を起こす.

図 1: Ising 模型における様々なグラフ. 逆温度 β は温度 T と $\beta \propto T^{-1}$ の関係がある.

き, 常磁性相では自発磁化が 0 になり, 強磁性相では 0 から立ち上がる (図 1b). この 0 から立ち上がる温度 β_c を臨界点と呼ぶ. 温度変化に対して自発磁化が急激に変化するという特異な振る舞いをするのは, モデルの定義からはすぐに理解することができない, 非自明な問題である. このような臨界点付近で起こる特異な現象の総称を臨界現象と呼ぶ.

また, 磁化を磁場で微分した量を帯磁率 $\chi^{\text{cl}}(\beta) = \partial m / \partial h|_{h=0}$ といい, これは外部磁場を変化させたときの感受率 (どの程度変化しやすいか) を意味している. 臨界点 β_c の直上では外部磁場に対する磁化のゆらぎが非常に大きくなるため, 帯磁率は発散する (図 1c). 特に, β_c の近傍では帯磁率が $\chi^{\text{cl}} \asymp |\beta_c - \beta|^{-\gamma}$ のように冪的に振る舞うと信じられている¹⁾²⁾. ここに現れた指数 γ を臨界指数と呼ぶ.

現実の実験によると, 臨界指数はあらゆる物質や現象で限られた値しか取り得ないことが確認されている. つまり, 相互作用の形などのモデルの詳細に依らずに, 空間次元や対称性などの少数の要素のみで決まると信じられている. この普遍性を解明することは統計物理学における重要な課題の一つである.

¹⁾ 実関数 f と g に対して, $t \rightarrow \alpha$ のとき $f(t) \asymp g(t)$ とは, $\exists c_1, c_2 < \infty$ s.t. $c_1 g(t) \leq f(t) \leq c_2 g(t)$.

²⁾ 図 1c では物理学の文献に合わせて臨界点の両側のグラフを描いたが, 本稿では β_c の左側 (高温相) のみを扱う.

1.2 高次元臨界現象

格子の次元 d が十分大きいとき、臨界指数はスピン同士の相互作用が無いモデルのそれに一致すると予想されている。例えば、相互作用係数が $J_{x,y} = \mathbb{1}_{\{x \text{ と } y \text{ は隣接点}\}}$ （最近接相互作用、後の脚注 6）も参照）の場合を考えよう。分配関数を計算するには (1) の二体相互作用の項を個別に足し合わせる必要がある。しかし、一般にその計算を実行するのは困難である。物理学的には格子点 x での局所的な Hamiltonian H_x^{cl} を次のように置き換えることによって、一体相互作用に帰着させる手法が考えられている：

$$H_x^{\text{cl}}(\sigma) = - \sum_{y: x \text{ の隣接点}} \sigma_x \sigma_y - h \sigma_x \longrightarrow -2d \left\langle \sum_{y: x \text{ の隣接点}} \sigma_y \right\rangle_{\beta, h; \Lambda} \sigma_x - h \sigma_x = -(2dm + h) \sigma_x.$$

つまり、 x における周りの点からの寄与を平均値（磁化）で置き換える。このような近似を平均場近似と呼び、これが十分高次元で有効なのは大数の法則から明らかだろう。平均場近似から求められる臨界指数 ($\gamma = 1$) を平均場臨界指数と呼ぶ。

一般の次元では平均場近似は正しい結果を与えない。実際、2 次元では $\gamma > 1$ であることが知られている。そこで、平均場近似が有効になるぎりぎりの次元を上部臨界次元と呼ぶ。古典 Ising 模型の上部臨界次元は 4 と予想されている。この予想が正しいことは、格子が $\mathbb{Z}^d$ のとき³⁾には既に証明されており、その手法を以下に示す。

古典 Ising 模型の臨界指数が平均場臨界指数に退化することの十分条件として、赤外評価がある：4 次元より大きい次元 d に対して、

$$\exists C \in [0, \infty), \quad \forall \beta < \beta_c, \quad 0 \leq \hat{G}_\beta(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta e^{ik \cdot x} \leq \frac{C}{\hat{J}_0 - \hat{J}_k}. \quad (2)$$

ここで、 $\hat{J}_k$ は $J_{o,x}$ の Fourier 変換 $\hat{J}_k = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{o,x} e^{ik \cdot x}$ を意味する。もし (2) が成り立てば、次の不等式 [1] から $\gamma = 1$ が導かれる。

$$\exists C_1(\beta), C_2(\beta, B^{\text{cl}}) \in [0, \infty), \quad \frac{C_1(\beta)}{\beta_c - \beta} \leq \chi^{\text{cl}}(\beta) \leq \frac{C_2(\beta, B^{\text{cl}})}{\beta_c - \beta} \quad \left(B^{\text{cl}} := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_o \sigma_x \rangle_\beta^2 \right). \quad (3)$$

実際、Parseval の等式により $B^{\text{cl}} = \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{G}_\beta(k)^2 d^d k$ であるから、(2) を適用して積分を計算⁴⁾すれば $B^{\text{cl}} < \infty$ がわかる。

1.3 量子 Ising 模型

古典 Ising 模型は格子点上のスピン——現実の物質では結晶を構成している原子に相当——の方向だけを考慮したモデルであった。その一方で、現代物理学の教えるところによれば、実際の原子の振る舞いは量子力学的に扱われるべき対象である。そこで、古典 Ising 模型のスピンを量子力学におい

³⁾ かつ鏡映正値性 ([7, 付録 B] などを参照) が満たされるような相互作用係数とき。

⁴⁾ d 次元単純ランダムウォークの再帰確率の計算と殆ど同じ。

て対応する作用素で置き換え、横磁場を印加する（ここの詳しい定義や横磁場を加えることの意味については次節を参照）．このようにして得られるモデルが量子 Ising 模型である．量子 Ising 模型は古典のそれと異なる興味深い性質を示すことが知られている．例えば、温度を固定しても横磁場の強さを変化させることによって相転移を起こす（図 1d）．これに関連する数学的な結果は Björnberg [3] によって得られている．そこでは、高次元の量子 Ising 模型において、温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させると帯磁率が平均場臨界指数に従って発散することが示されている．

その一方で、特に、講演者らは横磁場を加えたときにその高次元での振る舞いが古典系からどの程度ずれるかということに興味がある．問題設定としてはよく似ているものの、Björnberg の結果は温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させた場合であって、温度変化は考慮されていない．古典系からのずれという観点からは相互作用係数を固定したときに温度や横磁場の強さを変化させた場合の応答を調べたい．講演者らは現在までに、ある条件の下、古典系の (4) に対応する不等式を得た．以下では量子 Ising 模型の詳しい定義を述べたあと、その不等式の証明の概略を説明する．

2 モデルの定義

有限格子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対して、古典 Ising 模型では Hamiltonian が $\{-1, +1\}^\Lambda$ 上の関数として 1 で与えられた．量子 Ising 模型では Hamiltonian がテンソル空間 $\bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2$ 上の作用素になる．その定義や性質を述べるために、Pauli 行列とブラ・ケット記法を導入する．

2 次正方行列の組⁵⁾

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を Pauli 行列と呼び、それらと単位行列 I によるテンソル積を

$$S_x^i := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{x}{S^i} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{|\Lambda| \text{ 個}} \quad (i = 1, 2, 3, x \in \Lambda)$$

$$S_x^i S_y^j := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{x}{S^i} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{y}{S^j} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{|\Lambda| \text{ 個}} \quad (i, j = 1, 2, 3, x, y \in \Lambda)$$

と書く． S^3 の固有値 ± 1 に対応する固有ベクトル（縦ベクトル）を $|\pm 1\rangle$ ，この転置共役を $\langle \pm 1|$ と記す：

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{転置共役}} \langle 1| = (1 \quad 0), \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{転置共役}} \langle -1| = (0 \quad 1).$$

$|\bullet\rangle$ をケットベクトル， $\langle \bullet|$ をブラベクトルという．ケットベクトルのテンソル積全体 $\{\bigotimes_{x \in \Lambda} |\sigma_x\rangle \mid \sigma_x = \pm 1\}$ はテンソル空間 $\bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2$ の基底になる．

⁵⁾ 「Pauli 行列」というこの 3 つを指すので、一応 S^2 も書いた．しかし、後で使うのは S^1 と S^3 のみで S^2 は使わない．添字はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸に対応しており、Pauli 行列の固有値は各軸に対してスピンの向きを観測したときの物理量に相当する．

以上の準備の下、量子 Ising 模型の Hamiltonian と分配関数 ((1) の確率測度の規格化定数に相当) を次のように定義する。

定義 1. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ を有限格子とする。量子 Ising 模型の Hamiltonian 作用素とはテンソル空間 $\bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2$ 上の作用素

$$H = - \sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} S_x^3 S_y^3 - h \sum_{x \in \Lambda} S_x^3 - \delta \sum_{x \in \Lambda} S_x^1$$

である。ここで、 $J_{x,y} \in \mathbb{R}$ を相互作用係数、 $h > 0$ を外部磁場の強さ、 $\delta > 0$ を横磁場の強さと呼ぶ。また、逆温度 $\beta \in (0, \infty]$ と $A: \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2 \rightarrow \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2$ に対して、行列のトレースを用いて分配関数 Z と作用素 A の期待値 $\langle A \rangle$ を

$$Z(\beta, \delta, h) = \text{Tr} [e^{-\beta H}], \quad \langle A \rangle_{\beta, \delta, h; \Lambda} = \frac{\text{Tr} [A e^{-\beta H}]}{Z(\beta, \delta, h)}$$

と定義する。

注意 2. 以下では有限格子 Λ に周期境界条件を課してトラスとみなす。また、相互作用係数には並進対称性 $\{J_{x,y}\}_{x,y \in \Lambda} = \{J_{o,y-x}\}_{x,y \in \Lambda}$ を仮定し、常に $J_{x,y} > 0$ (強磁性) とする。なお、 $\lambda \in \mathbb{R}$ について相互作用係数が特に $J_{x,y} = \lambda \mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$ という形⁶⁾をしているとき、その $\{J_{x,y}\}_{x,y \in \Lambda}$ を最近接相互作用という。

例 3. $\delta = 0$ とし、 $|\Sigma\rangle = \bigotimes_{x \in \Lambda} |\sigma_x\rangle$ とおく。このとき、各 $|\sigma_x\rangle$ が S^3 の固有ベクトルであることに注意して分配関数を計算すると

$$\begin{aligned} Z(\beta, 0, h) &= \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} \langle \Sigma | e^{-\beta H} | \Sigma \rangle \stackrel{\text{可換性}}{=} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} \langle \Sigma | \prod_{x,y \in \Lambda} e^{\beta J_{x,y} S_x^3 S_y^3} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta h S_x^3} | \Sigma \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} \prod_{x,y \in \Lambda} e^{\beta J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \prod_{x \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_x} \langle \Sigma | \Sigma \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} e^{\beta \sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} e^{\beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x} = \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} e^{-\beta H^{\text{cl}}(\sigma)} \end{aligned}$$

となって、古典 Ising 模型の分配関数に一致する。ただし、3 番目の等号は指数関数を級数展開してからテンソル積の計算を実行することで導かれる。このようなわけで、横磁場の項は「量子効果」を表している。直感的にも、 S^1 は状態を反転させる: $S^1 |\sigma\rangle = |-\sigma\rangle$ ($\sigma = \pm 1$) ので、 δ が大きいほど反転しやすい——ゆらぎが大きくなることがわかる。

古典 Ising 模型では Helmholtz 自由エネルギーから熱力学的な量 (マクロな、目に見えるようなスケールで観測される量) を定義する。量子 Ising 模型でもそれに倣って Helmholtz 自由エネルギーに基づいて磁化と帯磁率を定義する。すなわち、Helmholtz 自由エネルギー (密度) を

$$f(\beta, \delta, h) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{-1}{\beta |\Lambda|} \log Z(\beta, \delta, h)$$

⁶⁾ $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対して、 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ である。 $\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$ は $\bullet$ が真なら 1, 偽なら 0 を返す定義関数である。

とした上で、磁化と帯磁率をその微分によって、

$$m(\beta, \delta, h) := -\frac{\partial f(\beta, \delta, h)}{\partial h} \stackrel{\text{周期性}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \langle S_o^3 \rangle_{\beta, \delta, h; \Lambda}, \quad \chi(\beta, \delta) := \left. \frac{\partial m(\beta, \delta, h)}{\partial h} \right|_{h=0}$$

と定義する。ただし、 m の等号のところでは Λ がトーラスであることを用いて表式を書き替えた。また、臨界点を $\beta_c(\delta) = \inf \{ \beta > 0 \mid \chi(\beta, \delta) = \infty \}$ で定義する。

3 主結果

3.1 準備

主結果の主張を述べる前に、必要な記号や先行研究の結果について言及する。

3.1.1 鈴木-Trotter 変換

d 次元量子 Ising 模型は次の意味で $d+1$ 次元古典 Ising 模型と等価であることが知られている。以下では、長さ l のトーラスを $[l] = \{0, 1, \dots, l-1\}$ と記す。

定理 4 ([9]). 有限格子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 上の量子 Ising 模型の分配関数 Z に対して、

$$Z(\beta, \delta, h) = \lim_{l \uparrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sinh \frac{2\beta\delta}{l} \right)^{\frac{|\Lambda|l}{2}} \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^{\Lambda \times [l]}} e^{-H^{\text{ST}}(\sigma)}$$

が成り立つ。ただし、 $K_l = 2^{-1} \log \coth(\beta\delta/l)$ とおいたとき、 $\Lambda \times [l]$ 上の古典的な Hamiltonian 関数を

$$H^{\text{ST}}(\sigma) = - \sum_{x,y \in \Lambda} \sum_{t \in [l]} \frac{\beta J_{x,y}}{l} \sigma_{x,t} \sigma_{y,t} - \sum_{x \in \Lambda} \sum_{t \in [l]} K_l \sigma_{x,t} \sigma_{x,t+1} - \sum_{x \in \Lambda} \sum_{t \in [l]} \frac{\beta h}{l} \sigma_{x,t}$$

とした。

証明の要旨。例 3 と同様に、 $|\Sigma\rangle = \bigotimes_{x \in \Lambda} |\sigma_x\rangle$ とおく。Trotter の公式により、

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left[\exp \left(\underbrace{\sum_{x,y} \beta J_{x,y} S_x^3 S_y^3}_{=A} + \beta h \underbrace{\sum_x S_x^3}_{=B} + \beta \delta \sum_x S_x^1 \right) \right] \\ &= \lim_{l \uparrow \infty} \text{Tr} \left[\left(e^{A/l} e^{B/l} \right)^l \right] = \lim_{l \uparrow \infty} \langle \Sigma | \underbrace{\left(e^{A/l} e^{B/l} \right) \dots \left(e^{A/l} e^{B/l} \right)}_{l \text{ 個}} | \Sigma \rangle \\ &= \lim_{l \uparrow \infty} \prod_{j=0}^{l-1} \langle \Sigma_j | e^{A/l} e^{B/l} | \Sigma_{j+1} \rangle \quad \left(\because I = \sum_{\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda} |\Sigma\rangle \langle \Sigma| \text{ を } l-1 \text{ 個挿入} \right) \\ &= \lim_{l \uparrow \infty} \prod_{j=0}^{l-1} \exp \left(\sum_{x,y} \frac{\beta J_{x,y}}{l} \sigma_{x,j} \sigma_{y,j} + \beta h \sum_x \sigma_{x,j} \right) \langle \Sigma_j | e^{\frac{\beta \delta}{l} \sum_x S_x^1} | \Sigma_{j+1} \rangle. \end{aligned}$$

ただし、各 $|\Sigma_j\rangle$ はテンソル空間 $\bigotimes_{x \in \Lambda} C^2$ の基底であり、特に $|\Psi_l\rangle = |\Psi_0\rangle$ と表記した。最後の因子は

$$\langle \Sigma_j | e^{\beta \delta \sum_x S_x^1} | \Sigma_{j+1} \rangle = \langle \Sigma_j | \bigotimes_{x \in \Lambda} e^{\beta \delta S_x^1} | \Sigma_{j+1} \rangle = \prod_{x \in \Lambda} \langle \sigma_{x,j} | e^{\beta \delta S_x^1} | \sigma_{x,j+1} \rangle$$

と書き替えられる。最後の内積を計算すれば、定理の表式を得る。 $\square$

実空間 Λ に新たに座標軸を加えた $\Lambda \times [l]$ を時空間と称する。このような名称は $t \in [l]$ を虚数時間と解釈できることを由来とする⁷⁾。時空間のスピン配置を $\sigma = \{\sigma_{x,t}\}_{x \in \Lambda, t \in [l]} \in \{-1, +1\}^{\Lambda \times [l]}$ とすると、定理 4 から、 S_o^3 の期待値と帯磁率に対する次の表式が導かれる：

$$\begin{aligned} \langle S_o^3 \rangle_{\beta, \delta, h; \Lambda} &= \lim_{l \uparrow \infty} \langle \sigma_{o,0} \rangle_{\beta, \delta, h; \Lambda, l} := \frac{\sum_{\sigma} \sigma_{o,0} e^{-H^{\text{ST}}(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-H^{\text{ST}}(\sigma)}}, \\ \chi(\beta, \delta) &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{l \uparrow \infty} \chi_{\Lambda, l}(\beta, \delta) := \beta \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{l \uparrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{(x,t) \in \Lambda \times [l]} \langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t} \rangle_{\beta, \delta, 0; \Lambda, l} \quad (\cdot \text{ 周期性}). \end{aligned}$$

3.1.2 時空間の Ising 模型における相関不等式

この節と 3.3 節では $\langle \bullet \rangle$ の添え字を省略する。また、 $\langle f; g \rangle := \langle fg \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle$ と書き、これを連結二点相関関数と呼ぶ。古典 Ising 模型においては連結二点相関関数に対する様々な不等式が知られている。その一部を以下に列挙する。

Griffiths 第 1・第 2 不等式 [4, 5, 6] 任意の $A, B \subset \Lambda \times [l]$ と $X, Y \in \Lambda \times [l]$ に対して、

$$\left\langle \prod_{X \in A} \sigma_X \right\rangle \geq 0, \quad \left\langle \prod_{X \in A} \sigma_X; \prod_{Y \in B} \sigma_Y \right\rangle \geq 0.$$

Lebowitz の不等式 [8] $W, X, Y, Z \in \Lambda \times [l]$ に対して、

$$\langle \sigma_W \sigma_X; \sigma_Y \sigma_Z \rangle \leq \langle \sigma_W \sigma_Y \rangle \langle \sigma_X \sigma_Z \rangle + \langle \sigma_W \sigma_Z \rangle \langle \sigma_Y \sigma_X \rangle.$$

Aizenman-Graham の不等式 [2] $W, X, Y, Z \in \Lambda \times [l]$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_W \sigma_X; \sigma_Y \sigma_Z \rangle &\geq \langle \sigma_W \sigma_Y \rangle \langle \sigma_X \sigma_Z \rangle + \langle \sigma_W \sigma_Z \rangle \langle \sigma_Y \sigma_X \rangle \\ &\quad - \sum_{U, V \in \Lambda \times [l]} (\tanh \tilde{J}_{U, V}) \langle \sigma_W \sigma_X; \sigma_U \sigma_V \rangle \langle \sigma_Y \sigma_V \rangle \langle \sigma_Z \sigma_V \rangle \\ &\quad - \langle \sigma_W \sigma_X \rangle \langle \sigma_W \sigma_Y \rangle \langle \sigma_W \sigma_Z \rangle - \langle \sigma_W \sigma_X \rangle \langle \sigma_X \sigma_Y \rangle \langle \sigma_X \sigma_Z \rangle. \end{aligned}$$

ただし、 $X = (x, s)$, $Y = (y, t)$ と表したとき、 $\tilde{J}_{X, Y} := \beta J_{x, y} l^{-1} \mathbb{1}_{\{s=t\}} + K_l \mathbb{1}_{\{x=y \text{ \& } t=s+1\}}$ である。

次の補題は Lebowitz の不等式の特別な場合である。すなわち、虚数時間軸上の隣り合う点に対しては l^{-1} という因子が取り出せることを意味する。この事実は主結果を証明する上で重要である。

⁷⁾ スピンが虚時間 it で時間発展させたように書けるため。例えば、[10, 14.3 節] を参照。

補題 5 (半田, K., 坂井). $u, x \in \Lambda$ と $s, t \in [l]$ に対して,

$$\langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t}; \sigma_{u,s} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle \leq \frac{4\beta\delta}{l} \left(\langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{u,s} \rangle\rangle \langle\langle \sigma_{x,t} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle + \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle \langle\langle \sigma_{u,s} \sigma_{x,t} \rangle\rangle \right).$$

補題の証明にはランダム・カレント表現 ([7, 付録 A] を参照) を用いるが, 本稿の紙面の都合上省略する.

3.2 主張

時空間のバブルと呼ばれる量を $B_{\Lambda,l} := l^{-1} \sum_{(x,t) \in \Lambda \times [l]} \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t} \rangle\rangle_{\beta,\delta;\Lambda,l}^2$ と定義する. このとき, 帯磁率に対して, 古典 Ising 模型の (3) に対応する次の不等式評価が成り立つ. この定理によって, ある条件下では $\gamma = 1$ であることがわかる.

定理 6 (半田, K., 坂井). 最近接強磁性量子 Ising 模型において, $B_{\Lambda,l} < \infty$ かつ $\delta \ll 1$ とする. このとき, $0 < \beta < \beta_c(\delta)$ に対して, $C(\beta, B_{\Lambda,l}) \in (0, \infty)$ が存在して,

$$\frac{\beta}{4d(\beta_c - \beta)} \leq \chi(\beta, \delta) \leq \frac{C(\beta, B_{\Lambda,l})}{\beta_c - \beta}.$$

3.3 証明

まず, 有限体積での帯磁率 $\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)$ に対して, 次の微分不等式を示す. すなわち, $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ が存在して

$$0 \leq C_1 \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)}{\beta} \right)^2 \leq \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)}{\beta} \leq C_2 \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)}{\beta} \right)^2 \quad (4)$$

を満たすことを示す. 実際, この両辺を $(\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)/\beta)^2$ で割って, $0 < \beta_1 < \beta_c < \beta_2$ なる β_1 から β_2 まで積分すると,

$$C_1 (\beta_2 - \beta_1) \leq \frac{\beta_1}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_1, \delta)} - \frac{\beta_2}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_2, \delta)} \leq C_2 (\beta_2 - \beta_1)$$

となる. 極限 $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ および $l \uparrow \infty$ をとれば, β_2 の定義と $\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)$ の広義単調性によって主結果の不等式を得る.

3.3.1 微分不等式の上界

帯磁率の微分は

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} = \sum_{\substack{u,v,x \in \Lambda \\ s,t \in [l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2} \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t}; \sigma_{u,s} \sigma_{v,s} \rangle\rangle + \sum_{\substack{u,x \in \Lambda \\ s,t \in [l]}} \frac{1}{l} \frac{\partial K_l}{\partial \beta} \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t}; \sigma_{u,s} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle \quad (5)$$

と書ける. ここで, $\partial K_l / \partial \beta = -\delta / (l \sinh(2\beta\delta/l))$ となって, 第 2 項は負になることに注意されたい. (5) の第 1 項に Lebowitz の不等式を, 第 2 項に Griffiths 第 2 不等式を適用すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\chi_{\Lambda, l}(\beta)}{\beta} &\leq \sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l^2} \left(\langle \sigma_{o, 0} \sigma_{u, s} \rangle \langle \sigma_{x, t} \sigma_{v, s} \rangle + \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{v, s} \rangle \langle \sigma_{u, s} \sigma_{x, t} \rangle \right) \\
&\stackrel{\text{対称性}}{=} \sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{2J_{u, v}}{l^2} \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{u, s} \rangle \langle \sigma_{x, t} \sigma_{v, s} \rangle \stackrel{\text{最近接}}{=} 4d \left(\frac{\chi_{\Lambda, l}(\beta)}{\beta} \right)^2
\end{aligned}$$

となって, (4) の上界を得る. □

3.3.2 微分不等式の下界

(5) の第 1 項に Aizenman-Graham の不等式を適用して, Schwarz の不等式を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l^2} \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t}; \sigma_{u, s} \sigma_{v, s} \rangle &\stackrel{\text{AG}}{\geq} \underbrace{\sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l^2} \left(\langle \sigma_{o, 0} \sigma_{u, s} \rangle \langle \sigma_{x, t} \sigma_{v, s} \rangle + \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{v, s} \rangle \langle \sigma_{u, s} \sigma_{x, t} \rangle \right)}_{=4d\chi_{\Lambda, l}(\beta)^2/\beta^2} \\
&- \sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l^2} \sum_{X, Y \in \Lambda \times [l]} (\tanh \tilde{J}_{X, Y}) \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t}; \sigma_X \sigma_Y \rangle \langle \sigma_{u, s} \sigma_Y \rangle \langle \sigma_{v, s} \sigma_X \rangle \\
&- \underbrace{\sum_{\substack{u, v, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l^2} \left(\langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t} \rangle \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{u, s} \rangle \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{v, s} \rangle + \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t} \rangle \langle \sigma_{x, t} \sigma_{u, s} \rangle \langle \sigma_{x, t} \sigma_{v, s} \rangle \right)}_{\leq 4dB_{\Lambda, l}\chi_{\Lambda, l}(\beta)/\beta}.
\end{aligned}$$

この右辺第 3 項は $X = (w, s'), Y = (y, t')$ の値に応じて分類する. すなわち, $s' = t'$ のときには等式 (5) を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \sum_{\substack{w, x, y \in \Lambda \\ t, s' \in [l]}} \underbrace{\tanh \frac{\beta J_{w, y}}{l} \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t}; \sigma_{w, s'} \sigma_{y, s'} \rangle}_{\leq \beta J_{w, y}/l} \underbrace{\sum_{\substack{u, v \in \Lambda \\ s \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l} \langle \sigma_{u, s} \sigma_{y, s'} \rangle \langle \sigma_{v, s} \sigma_{y, s'} \rangle}_{\leq 2dB_{\Lambda, l}} \\
\leq 2d\beta B_{\Lambda, l} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\chi_{\Lambda, l}(\beta)}{\beta} - 2d\beta B_{\Lambda, l} \sum_{\substack{u, x \in \Lambda \\ s, t \in [l]}} \frac{1}{l} \frac{\partial K_l}{\partial \beta} \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t}; \sigma_{u, s} \sigma_{u, s+1} \rangle \quad (6)
\end{aligned}$$

と評価し, $w = y$ かつ $t' = s' + 1$ のときには $\tanh K_l = (1 - \tanh(\beta\delta/l))/(1 + \tanh(\beta\delta/l))$ を用いて

$$\underbrace{\frac{1 - \tanh(\beta\delta/l)}{1 + \tanh(\beta\delta/l)}}_{\leq 1} \frac{1}{l} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ s', t \in [l]}} \langle \sigma_{o, 0} \sigma_{x, t}; \sigma_{y, s'} \sigma_{y, s'+1} \rangle \underbrace{\sum_{\substack{u, v \in \Lambda \\ s \in [l]}} \frac{J_{u, v}}{l} \langle \sigma_{u, s} \sigma_{y, s'+1} \rangle \langle \sigma_{v, s} \sigma_{y, s'+1} \rangle}_{\leq 2dB_{\Lambda, l}} \quad (7)$$

と評価する. 残りの (5) の第 2 項と (6) と (7) は補題 5 によって, 例えば

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{u,x \in \Lambda \\ s,t \in [l]}} \frac{1}{l} \frac{\partial K_l}{\partial \beta} \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t}; \sigma_{u,s} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle = - \sum_{\substack{u,x \in \Lambda \\ s,t \in [l]}} \frac{\delta}{l^2 \sinh(2\beta\delta/l)} \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{x,t}; \sigma_{u,s} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle \\
& \geq - \frac{4\beta\delta^2}{l^3 \sinh(2\beta\delta/l)} \sum_{\substack{u,x \in \Lambda \\ s,t \in [l]}} \left(\langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{u,s} \rangle\rangle \langle\langle \sigma_{x,t} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle + \langle\langle \sigma_{o,0} \sigma_{u,s+1} \rangle\rangle \langle\langle \sigma_{u,s} \sigma_{x,t} \rangle\rangle \right) \\
& = - \frac{8\beta\delta^2}{l \sinh(2\beta\delta/l)} \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} \right)^2 \geq -4\delta \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} \right)^2
\end{aligned}$$

となる．以上の評価を整理すれば，(4) の下界を得る． $\square$

参考文献

- [1] M. Aizenman. Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. *Commun. Math. Phys.* **86** (1982): 1–48.
- [2] M. Aizenman and R. Graham. On the renormalized coupling constant and the susceptibility in ϕ_4^4 field theory and the Ising model in four dimensions. *Nucl. Phys.* **B225** [FS7] (1983): 261–288.
- [3] J.E. Björnberg. Infrared bound and mean-field behaviour in the quantum Ising model. *Commun. Math. Phys.* **323** (2013): 329–366.
- [4] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets I. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 478–483.
- [5] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets II. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 484–489.
- [6] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets III. *Commun. Math. Phys.* **6** (1967): 121–127.
- [7] 田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版株式会社，2015 年）
- [8] J.L. Lebowitz. GHS and other inequalities. *Commun. Math. Phys.* **35** (1974): 87–92.
- [9] M. Suzuki. Relationship between d -Dimensional Quantal Spin Systems and $(d+1)$ -Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *PTP.* **56** (1976): 1454–1469.
- [10] 高橋和孝，西森秀稔『相転移・臨界現象とくりこみ群』（丸善出版株式会社，2017 年）