Tensor product representations from Newton-Okounkov bodies

東京工業大学理学院 藤田 直樹 (Naoki Fujita)* †

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概 要

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその斉次座標環上の付値から作られる凸体であり, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている. 本稿では旗多様体上のある旗多様体束に着目し, その Newton-Okounkov 凸体を一般線形群の表現の言葉で具体的に記述する. この記述を応用することで一般線形群のテンソル積表現の既約分解を Newton-Okounkov 凸体と関連付けることができる. 具体的には既約成分の重複度を与える Littlewood-Richardson 係数を Newton-Okounkov 凸体から作られるある有理凸多面体の格子点の個数として実現する. 本稿の内容は Eunjeong Lee 氏および Dong Youp Suh 教授との共同研究 [4] に基づく.

1 導入

一般線形群 $G \coloneqq GL_n(\mathbb{C})$ とは複素 n 次正則行列全体のなす群のことである. 集合 P_+ を

$$P_+ \coloneqq \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

と定義し, $\lambda \in P_+$ に対応する有限次元既約 G-加群を $V(\lambda)$ とする; 2 節で $V(\lambda)$ の正確な定義を述べる. テンソル積 $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ への G-作用を

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

と定義すると, G-加群 $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ は既約加群の直和に分解する ([5, Sect. 8.2] 参照):

$$V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} V(\nu)^{\oplus c^{\nu}_{\lambda,\mu}}.$$

この重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を具体的に記述することは G の表現論における重要な問題の一つである. $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in G$ に対して, トレース $\mathrm{tr}(t\colon V(\lambda) \to V(\lambda))$ は λ に対応するシューア多項式

$$s_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_n) \coloneqq \frac{\det(t_j^{\lambda_i + n - i})_{1 \leq i,j \leq n}}{\det(t_j^{n-i})_{1 \leq i,j \leq n}}$$

と一致することが知られている ([5, Sect. 8.3] 参照). 特に重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ はシューア多項式の展開係数と一致する:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in P_+} c^{\nu}_{\lambda,\mu} s_\nu.$$

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp

†日本学術振興会特別研究員 (PD)

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を **Littlewood-Richardson 係数**という. Berenstein-Zelevinsky [2, Theorems 2.3, 2.4] は標準基底 (= 大域結晶基底) の理論を用いて, $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ をある具体的な有理凸多面体の格子点の個数として実現した. 本稿では旗多様体上のある旗多様体束に着目し, その Newton-Okounkov 凸体を用いて Berenstein-Zelevinsky のものとは異なる記述を与える.

2 テンソル積表現の幾何学的実現

$B \subset G$ を上三角行列全体のなす部分群 (ボレル部分群) とし,

$$\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n) \coloneqq \{(0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1 \le i \le n\}$$

とおく. このとき $\mathbb{C}^n$ への自然な左 G-作用は次のように $\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導する: $g \in G$ および $V_\bullet = (0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \in \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ に対して,

$$gV_\bullet \coloneqq (0 \subset gV_1 \subset gV_2 \subset \cdots \subset gV_n = \mathbb{C}^n)$$

とする. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ を単位ベクトルとし, $1 \le i \le n$ に対して $E_i \subset \mathbb{C}^n$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i$ で生成される $\mathbb{C}$-部分空間とする. このとき B は $(0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{C}^n) \in \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ を固定する G の元全体の集合と一致する. そのため集合 $\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ は商多様体 G/B と同一視される. これを**旗多様体**という. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in P_+$ に対して, G/B 上の直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を

$$\mathcal{L}_\lambda \coloneqq (G \times \mathbb{C})/B$$

と定める. ここで B の $G \times \mathbb{C}$ への右作用は

$$(g, c) \cdot b \coloneqq (gb, \lambda(b)c)$$

で与えられる; ただし $b \in B$ の対角成分を $d_1, d_2, \ldots, d_n$ としたとき, $\lambda(b) \coloneqq d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \cdots d_n^{\lambda_n}$ である. $V(\lambda) \coloneqq H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)^*$ とおくと, $V(\lambda)$ は有限次元既約 G-加群である ([5, Sect. 9.3] 参照). 非特異射影多様体 Z を

$$Z \coloneqq (G \times G)/B^2$$

と定義する; ここで B^2 の右作用は $g_1, g_2 \in G$ および $b_1, b_2 \in B$ に対して

$$(g_1, g_2) \cdot (b_1, b_2) \coloneqq (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2)$$

と定める. 写像

$$Z \twoheadrightarrow G/B, \quad (g_1, g_2) \bmod B^2 \mapsto g_1 \bmod B,$$

により Z は G/B 上の G/B-束となっているが, これは自明束と同型である:

$$Z \xrightarrow{\sim} G/B \times G/B, \quad (g_1, g_2) \bmod B^2 \mapsto (g_1 \bmod B, g_1 g_2 \bmod B).$$

$\lambda, \mu \in P_+$ に対して, Z 上の直線束 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ を

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} \coloneqq (G \times G \times \mathbb{C})/B^2$$

と定める; ここで B^2 の $G \times G \times \mathbb{C}$ への右作用は

$$(g_1, g_2, c) \cdot (b_1, b_2) \coloneqq (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2, \lambda(b_1)\mu(b_2)c)$$

で与えられる. G の Z および $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ への左作用を $g, g_1, g_2 \in G$ および $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$g \cdot (g_1, g_2) \bmod B^2 \coloneqq (gg_1, g_2) \bmod B^2, \quad g \cdot (g_1, g_2, c) \bmod B^2 \coloneqq (gg_1, g_2, c) \bmod B^2$$

と定める. 射影 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu} \twoheadrightarrow Z$ がこれらの作用と compatible であるため, 大域切断のなす空間 $H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ は自然に G-加群となる. 上述の同型 $Z \simeq G/B \times G/B$ により, Z への G-作用は直積 $G/B \times G/B$ への対角作用と一致する. また直線束 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ は $\mathcal{L}_\lambda$ と $\mathcal{L}_\mu$ の直積と対応する. 従って G-加群としての同型

$$H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})^* \simeq V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$$

が得られる.

3　Newton-Okounkov 凸体と一般化ストリング多面体

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその斉次座標環上の付値から作られる凸体であり, Okounkov [13, 14, 15] によって導入された後 Kaveh-Khovanskii [8] および Lazarsfeld-Mustata [11] によって系統的な定義がなされ, トーリック多様体の理論を一般の射影多様体へ拡張するための枠組みとして注目されている. まず本稿で扱う Newton-Okounkov 凸体の定義を説明する.

$$N \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(G/B) = \frac{(n-1)n}{2}$$

とおく. このとき $\dim_{\mathbb{C}}(Z) = 2N$ である. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を複素 n 次正方行列全体のなす集合とし, 指数写像 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ を考える. $[n-1] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ とおき, $i \in [n-1]$ に対して $F_i \in \mathfrak{g}$ を $(i+1, i)$-成分のみ 1 で他の成分は 0 である n 次正方行列とする.

定義 3.1. 語 $(i_1, i_2, \ldots, i_N) \in [n-1]^N$ が**簡約語**であるとは, 次の写像が双有理射となることである:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^N \to G/B, \\ &(t_1, t_2, \ldots, t_N) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \exp(t_2 F_{i_2}) \cdots \exp(t_N F_{i_N}) \bmod B. \end{aligned}$$

例 3.2. 語 $(1, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots, n-1, n-2, \ldots, 1) \in [n-1]^N$ は簡約語である.

$(i_1, i_2, \ldots, i_N), (j_1, j_2, \ldots, j_N) \in [n-1]^N$ を簡約語とし,

$$\mathbf{i} \coloneqq (i_1, i_2, \ldots, i_N, j_1, j_2, \ldots, j_N) \in [n-1]^{2N}$$

とおく. このとき次の写像は双有理射である:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^{2N} \to Z, \\ &(t_1, \ldots, t_{2N}) \mapsto (\exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_N F_{i_N}), \exp(t_{N+1} F_{j_1}) \cdots \exp(t_{2N} F_{j_N})) \bmod B^2. \end{aligned}$$

この双有理射を用いて関数体 $\mathbb{C}(Z)$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_{2N})$ と同一視する. $\mathbb{Z}^{2N}$ 上の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1,\ldots,a_{2N}),(a'_1,\ldots,a'_{2N})\in\mathbb{Z}^{2N}$ に対して, ある $1\le k\le 2N$ について

$$a_1=a'_1,\ldots,a_{k-1}=a'_{k-1},\ a_k<a'_k$$

となるとき $(a_1,\ldots,a_{2N})<(a'_1,\ldots,a'_{2N})$ とする. この全順序 $<$ を用いて $t_1,\ldots,t_{2N}$ を変数とする単項式たちの間の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1,\ldots,a_{2N})<(a'_1,\ldots,a'_{2N})$ のとき $t_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}<t_1^{a'_1}\cdots t_{2N}^{a'_{2N}}$ とする. 以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}\colon \mathbb{C}(Z)\setminus\{0\}$ $(=\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_{2N})\setminus\{0\})\to\mathbb{Z}^{2N}$ を次のように定める: $f,g\in\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_{2N}]\setminus\{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f/g)\coloneqq v_{\mathbf{i}}(f)-v_{\mathbf{i}}(g)$ とし,

$$f=ct_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}+(\text{lower terms})\in\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_{2N}]\setminus\{0\}$$

に対して $v_{\mathbf{i}}(f)\coloneqq-(a_1,\ldots,a_{2N})$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり, “lower terms” は上で定めた全順序 $<$ に関して $t_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}$ より小さい単項式たちの線形結合である.

例 3.3. $G=GL_2(\mathbb{C})$ とする. このとき $2N=2$ であり, $f=t_1^2t_2+t_1t_2^2+t_2^3\in\mathbb{C}(Z)\simeq\mathbb{C}(t_1,t_2)$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f)=-(2,1)$ である.

定義 3.4 ([6, Sect. 3.1.1] および [9, Definition 1.10] 参照)**.** $\lambda,\mu\in P_+$ とし, 0 でない大域切断 $\tau\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ を固定する. 半群 $S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}^{2N}$ を

$$S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\coloneqq\bigcup_{k>0}\{(k,v_{\mathbf{i}}(\sigma/\tau^k))\mid\sigma\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^{\otimes k})\setminus\{0\}\}$$

と定義する. さらにこの $S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ を含む最小の実閉錐を $C(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{R}_{\ge0}\times\mathbb{R}^{2N}$ とし, 集合 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{R}^{2N}$ を

$$\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\coloneqq\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{2N}\mid(1,\mathbf{a})\in C(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\}$$

と定める. この $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ を Z の **Newton-Okounkov 凸体**という.

注意 3.5. 0 でない大域切断 $\tau,\tau'\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ に対して

$$\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau')=\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)+v_{\mathbf{i}}(\tau/\tau')$$

が成り立つ. そのため Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ は本質的に大域切断 τ の取り方に依らない.

Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ に対して G の表現の言葉を用いた解釈を与える. $e\in G$ を単位行列とし, 旗多様体 G/B を次の閉埋め込み ι により Z の閉部分多様体と同一視する:

$$\iota\colon G/B\hookrightarrow Z,\quad g \bmod B\mapsto(e,g)\bmod B^2.$$

このとき $\iota^*\mathcal{L}_{\lambda,\mu}=\mathcal{L}_\mu$ なので, ι は写像

$$\iota^*\colon H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})\to H^0(G/B,\mathcal{L}_\mu)$$

を誘導する.

定義 3.6. $\lambda, \mu \in P_+$ とする. $\sigma \in H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}) \setminus \{0\}$ に対して $\Omega_{\mathbf{i}}(\sigma) = (a_1, \ldots, a_N, a'_1, \ldots, a'_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2N}$ を

$$\begin{aligned}
a_1 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_1}^{a}\sigma \neq 0\},\\
a_2 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_2}^{a}F_{i_1}^{a_1}\sigma \neq 0\},\\
&\vdots\\
a_N &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_N}^{a}F_{i_{N-1}}^{a_{N-1}}\cdots F_{i_1}^{a_1}\sigma \neq 0\},\\
a'_1 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_1}^{a}\sigma(2) \neq 0\},\\
a'_2 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_2}^{a}F_{j_1}^{a'_1}\sigma(2) \neq 0\},\\
&\vdots\\
a'_N &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_N}^{a}F_{j_{N-1}}^{a'_{N-1}}\cdots F_{j_1}^{a'_1}\sigma(2) \neq 0\}
\end{aligned}$$

と定義する; ただし

$$\sigma(2) \coloneqq \iota^*(F_{i_N}^{a_N}F_{i_{N-1}}^{a_{N-1}}\cdots F_{i_1}^{a_1}\sigma)$$

である. この非負整数の組 $\Omega_{\mathbf{i}}(\sigma)$ を σ の $\mathbf{i}$ に関する**一般化ストリング・パラメトリゼーション**という.

定義 3.7 ([3, Definition 4.7] 参照)**.** 部分集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^{2N}$ を

$$\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \coloneqq \bigcup_{k>0}\{(k, \Omega_{\mathbf{i}}(\sigma)) \mid \sigma \in H^0(Z, \mathcal{L}_{k\lambda,k\mu}) \setminus \{0\}\}$$

と定義し, $\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2N}$ を $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ を含む最小の実閉錐とする. さらに集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{R}^{2N}$ を

$$\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \coloneqq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2N} \mid (1, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\}$$

と定める. この集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ を**一般化ストリング多面体**という.

注意 3.8. 論文 [3] では表現論における結晶基底の理論を用いて一般化ストリング多面体を定義しているが, 得られる集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は同じものである ([3, Proof of Theorem 5.2] 参照). 本稿の主結果 (定理 4.1) の証明では, こちらの結晶基底による定義を用いる (結晶基底については [7] 参照).

$\mathbb{R}$-同型写像 $\omega\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$ を $\omega(k, \mathbf{a}) \coloneqq (k, -\mathbf{a})$ と定義する.

定理 3.9 ([3, Proposition 2.13, Corollary 5.4] 参照)**.** $\lambda, \mu \in P_+$ とする.

(1) ある大域切断 $\tau_{\lambda,\mu} \in H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}) \setminus \{0\}$ が存在して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= \omega(S(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})),\\
\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= \omega(C(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})),\\
\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= -\Delta(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu}).
\end{aligned}$$

(2) 集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $S(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})$ はどちらも有限生成半群である. 特に $\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $C(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})$ は有理凸多面錐であり, $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $\Delta(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})$ は有理凸多面体である.

Newton-Okounkov 凸体の一般論を適用することで, トーリック退化および完全可積分系を構成することができる.

系 3.10 ([1, Theorem 1] 参照)**.** Z は $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ に対応する正規トーリック多様体へ平坦に退化する.

系 3.11 ([6, Theorem B] 参照)**.** 複素多様体としての開稠密部分集合 $U \subset Z$ および Z 上の実数値連続関数の組 $f_1, f_2, \ldots, f_{2N}$ が存在し, 次が成り立つ:

(1) $f_1, f_2, \ldots, f_{2N}$ の U への制限は U 上の完全可積分系を与える;

(2) モーメント写像 $(f_1, f_2, \ldots, f_{2N})\colon Z \to \mathbb{R}^{2N}$ の像は一般化ストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ と一致する.

4 Newton-Okounkov 凸体とテンソル積表現

写像 $\pi\colon \mathbb{R}^{2N} = \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を第 2 成分への射影とし,

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &\coloneqq -\pi(\Delta(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})) \\ &= \pi(\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}) \end{aligned}$$

とおく. $i \in [n-1]$ に対して,

$$\alpha_i \coloneqq (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, -1, 0, \ldots, 0)$$

と書き, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$\nu(\mathbf{y}) \coloneqq \lambda + \mu - \sum_{1 \le l \le N} y_l \alpha_{j_l}$$

とする. 次が本稿の主結果である.

定理 4.1. $\lambda, \mu \in P_+$ とする.

(1) 格子点 $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \cap \mathbb{Z}^N$ に既約表現 $V(\nu(\mathbf{y}))$ を対応させることで, 格子点集合 $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \cap \mathbb{Z}^N$ はテンソル積表現 $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} V(\nu)^{\oplus c^{\nu}_{\lambda,\mu}}$ の直和成分と重複度込みで 1 対 1 に対応する. 特に $V(\nu)$ の重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は集合

$$\{\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \cap \mathbb{Z}^N \mid \nu(\mathbf{y}) = \nu\}$$

の位数と一致する.

(2) $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \cap \mathbb{Z}^N$ に対して, ファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $V(\nu(\mathbf{y}))$ の簡約語 $(i_1, \ldots, i_N)$ に関するストリング多面体と一致する (ストリング多面体については [2, 12] 参照).

例 4.2. $(i_1,\dots,i_N)=(1,2,1,3,2,1,\dots,n-1,n-2,\dots,1)$ とする．このときファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y})\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $\nu(\mathbf{y})\in P_+$ に対応する Gelfand-Zetlin 多面体とユニモジュラー同値である ([12, Sect. 5] 参照).

例 4.3. $G=GL_2(\mathbb{C})$, $\lambda=(\lambda_1,0)$, $\mu=(\mu_1,0)\in P_+$, $\mathbf{i}=(1,1)$ とする．このとき

$$\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\},\ 0\le a_1\le\lambda_1+\mu_1-2a_2\}$$

が成り立つ．また

$$\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{a_2\in\mathbb{R}\mid 0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\}\}$$

であり, $a_2\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}$ は既約表現 $V((\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2))$ に対応する．実際

$$V(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}}V(\mu)\simeq\bigoplus_{0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\}}V((\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2))$$

が成り立つ．射影 $\pi\colon\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ は $\pi(a_1,a_2)=a_2$ で与えられ, $a_2\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}$ に対して

$$\pi^{-1}(a_2)\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{(a_1,a_2)\mid 0\le a_1\le\lambda_1+\mu_1-2a_2\}$$

である．第 1 成分への射影 $(a_1,a_2)\mapsto a_1$ により, $\pi^{-1}(a_2)\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $(\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2)\in P_+$ に対応する Gelfand-Zetlin 多面体と同一視される.

例 4.4. $G=GL_3(\mathbb{C})$, $\lambda=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2,0)$, $\mu=(\mu_1+\mu_2,\mu_2,0)\in P_+$, $\mathbf{i}=(1,2,1,1,2,1)$ とする．このとき [3, Corollary 4.15] により, 一般化ストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は以下の不等式を満たす $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^6_{\ge0}$ 全体の集合と一致する:

$$\begin{aligned}
&0\le y_3\le\min\{\lambda_2,\mu_1\},\\
&y_3\le y_2\le y_3+\mu_2,\\
&y_2-\lambda_2\le y_1\le\min\{\lambda_1,y_2-2y_3+\mu_1\},\\
&\max\{y_3-\lambda_2,-y_1+y_2-\lambda_2\}\le x_3\le-2y_1+y_2-2y_3+\lambda_1+\mu_1,\\
&x_3\le x_2\le x_3+y_1-2y_2+y_3+\lambda_2+\mu_2,\\
&0\le x_1\le x_2-2x_3-2y_1+y_2-2y_3+\lambda_1+\mu_1.
\end{aligned}$$

特に $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は以下の不等式を満たす $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_{\ge0}$ 全体の集合と一致する:

$$\begin{aligned}
&0\le y_3\le\min\{\lambda_2,\mu_1\},\\
&y_3\le y_2\le y_3+\mu_2,\\
&y_2-\lambda_2\le y_1\le\min\{\lambda_1,y_2-2y_3+\mu_1\}.
\end{aligned}$$

定理 4.1 より Littlewood-Richardson 係数 $c^\nu_{\lambda,\mu}$ は $\lambda+\mu-(y_1+y_3)\alpha_1-y_2\alpha_2=\nu$ を満たす $(y_1,y_2,y_3)\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^3$ の個数と一致する．特に $\lambda=\mu=(2,1,0)$ とすると, $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は

$$\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_{\ge0}\mid y_3\le1,\ y_3\le y_2\le y_3+1,\ y_2-1\le y_1\le\min\{1,y_2-2y_3+1\}\}$$

となる．従って

$$V((2,1,0))^{\otimes2}\simeq V((4,2,0))\oplus V((3,3,0))\oplus V((4,1,1))\oplus V((3,2,1))^{\oplus2}\oplus V((2,2,2))$$

が成り立つ.

参考文献

[1] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, Math. Ann. **356** (2013), 1183–1202.

[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), 77–128.

[3] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies for Bott-Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules, J. Algebra **515** (2018), 408–447.

[4] N. Fujita, E. Lee, and D. Y. Suh, Algebraic and geometric properties of flag Bott-Samelson varieties and applications to representations, preprint 2018, arXiv:1805.01664v1.

[5] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts Vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[6] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, Invent. Math. **202** (2015), 927–985.

[7] M. Kashiwara, On crystal bases, in Representations of Groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.

[8] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 263–282.

[9] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, Ann. of Math. **176** (2012), 925–978.

[10] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar, Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties, Compos. Math. **130** (2002), 293–318.

[11] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, Ann. Sci. de I'ENS **42** (2009), 783–835.

[12] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups **3** (1998), 145–179.

[13] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, Invent. Math. **125** (1996), 405–411.

[14] A. Okounkov, Multiplicities and Newton polytopes, in Kirillov's Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 181, Adv. Math. Sci. Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 231–244.

[15] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in The Orbit Method in Geometry and Physics, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329–347.