

フラクタル次元を用いた素数の無限性の証明

齋藤 耕太 (Kota Saito)

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
博士前期課程 2 年

m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

概要

本講演では素数の無限性をフラクタル次元の一種である upper box 次元を用いて証明する。

論文 [S] に基づき、素数の無限性をフラクタル次元を用いて証明することを目標とする。自分自身と 1 のみを約数にもつ 2 以上の自然数を素数という。例えば、

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$

が素数の例としてあげられる。最も古い素数についての結果は、約 2300 年前の紀元前 300 年、Euclid が素数の無限性と素因数分解の一意性を証明したものである。ここでは次の結果についてフラクタル次元を用いた別証明を与える。

定理 1 (Euclid [H, Book IX Proposition 20]). 素数は無限個存在する。

彼のオリジナルの証明について述べよう。まず、素数が有限個と仮定し、それらの積に 1 を足したものを P とおく。自然数 P は 2 以上で自分自身と 1 でしか割り切れない。よって、素数の定義から P は素数ということが帰結されるが、 P の定義から P はどの素数とも等しくない。これは矛盾である。

この証明は素数の無限性の代数的な証明の 1 つである。近年、非常に多くの素数の無限性の証明が知られている。[M] によると、驚くことにその数は少なくとも 183 通りある。ここでは新しい素数の無限性の証明を与える。手法は主に、2 以上の任意の自然数は素数の積でかけることと (一意性は必要ない)、フラクタル次元の一種の upper box 次元を用いる。その手法は Euler の素数の逆数和発散のアイデアに近い。彼は $\sum_{p: \text{prime}} 1/p = \infty$ と $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n = \infty$ が同値であることを証明した [E, pp. 172-174] ([D, pp. 1-2])。このことから、素数が有限個と仮定すると、自然数のサイズが小さいことが導かれる。これと同様にして、素数が有限個と仮定すると、自然数の逆数の upper box 次元が 0 となってしまう、矛盾する。

では, upper box 次元を定義しよう。集合 $F \subset \mathbb{R}$ を有界とし, δ を正の数とする。集合族 $\{U_j\}_{j=1}^N$ が $F \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_j$ と $d(U_j) \leq \delta$ ($j = 1, 2, \dots, N$) を満たすとき, $\{U_j\}_{j=1}^N$ を F の (有限) δ -被覆という。ただし, 任意の有界集合 U に対して, $d(U) = \sup_{x,y \in U} |x - y|$ と定義し, $d(U)$ を U の直径という。このとき,

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(F, \delta)}{-\log \delta}$$

を F の upper box 次元という。ただし, $N(F, \delta)$ は F の δ -被覆の濃度のうち最小のものとする。すなわち,

$$N(F, \delta) = \min \{N \in \mathbb{N} : \{U_j\}_{j=1}^N \text{ が } F \text{ の } \delta\text{-被覆}\}$$

と定義する。より詳しい upper box 次元についての性質は [F, R] を見よ。

定理 1 を証明するため, 次の補題を証明する。

補題 2. 集合 $C, D \subset \mathbb{R}$ を有界とする。このとき,

$$\overline{\dim}_B (CD) \leq \overline{\dim}_B C + \overline{\dim}_B D$$

が成り立つ。ただし, $CD = \{cd \in \mathbb{R} : c \in C, d \in D\}$ と定める。

数学的帰納法と補題 2 を用いることで, 任意の有界集合 $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\overline{\dim}_B (C_1 \cdots C_n) \leq \overline{\dim}_B C_1 + \cdots + \overline{\dim}_B C_n, \quad (1)$$

がなりたつ。この式 (1) を用いて素数の無限性を証明する。

補題 2 を仮定したときの定理 1 の証明. まず, $1/\mathbb{N} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ とおく。[F, Example 3.5] により, $\overline{\dim}_B (1/\mathbb{N}) = 1/2$ が成り立つが, 証明では片側の不等式だけ示せば十分であるので, ここでは

$$\overline{\dim}_B (1/\mathbb{N}) \geq 1/2 \quad (2)$$

を示そう。実数 $0 < \delta < 1/2$ を固定し, 自然数 $k \geq 2$ を $1/(k(k+1)) \leq \delta < 1/((k-1)k)$ を満たすものとする。集合 $U \subset \mathbb{R}$ を $d(U) \leq \delta$ を満たすものとしたとき, U は集合 $\{1, 1/2, \dots, 1/k\}$ と高々 1 点交わりをもつ。この事実は, 仮に $1/s, 1/t \in U$ がある $1 \leq s < t \leq k$ に対して成り立ったとき,

$$d(U) \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \geq \frac{1}{st} \geq \frac{1}{k(k-1)} > \delta$$

が成り立ってしまい条件 $d(U) \leq \delta$ と矛盾することから従う。したがって, $1/\mathbb{N}$ の任意の δ -被覆 $\{U_j\}_{j=1}^N$ を取ったとき, $N \geq k$ が成り立つ。よって,

$$N(1/\mathbb{N}, \delta) \geq k \geq \frac{(k(k+1))^{1/2}}{2} \geq \frac{\delta^{-1/2}}{2}$$

を得る。ゆえに,

$$\overline{\dim}_B(1/\mathbb{N}) = \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(1/\mathbb{N}, \delta)}{-\log \delta} \geq \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log(\delta^{-1/2}/2)}{-\log \delta} = 1/2$$

が従う。次に, 任意の素数 p に対して $A(p) = \{1/p^k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ とおき, $\overline{\dim}_B A(p) = 0$ が成り立つことを示す。任意の $0 < \delta < 1/2$ に対して,

$$A(p) \subseteq [-\delta/2, \delta/2] \cup \bigcup_{0 \leq k \leq \frac{\log(2/\delta)}{\log p}} [-\delta/2 + 1/p^k, \delta/2 + 1/p^k].$$

が成り立つ。よって, $N(A(p), \delta) \leq 2 + \frac{\log(2/\delta)}{\log p}$, が成り立ち,

$$0 \leq \overline{\dim}_B A(p) = \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(A(p), \delta)}{-\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log \left(2 + \frac{\log(2/\delta)}{\log p} \right)}{\log(1/\delta)} = 0. \quad (3)$$

が従う。

では, 素数が有限個と仮定して, 矛盾を導こう。有限個の素数を $p_1, \dots, p_n$ と書く。このとき, 2 以上の自然数は素数の積で書けることから, $1/\mathbb{N} = A(p_1) \cdots A(p_n)$ が成り立つ。したがって, 式 (1), (2), (3) により,

$$1/2 \leq \overline{\dim}_B 1/\mathbb{N} = \overline{\dim}_B (A(p_1) \cdots A(p_n)) \leq \overline{\dim}_B A(p_1) + \cdots + \overline{\dim}_B A(p_n) = 0$$

が成り立つ。これは矛盾である。 $\square$

補題 2 の証明. 実数 $0 < \delta < 1/2$ を固定し, $C \subseteq [-R, R]$ と $D \subseteq [-R, R]$ を満たす十分大きい実数 R をとる。集合族 $\{U_i\}_{i=1}^{N_C}$ と $\{V_j\}_{j=1}^{N_D}$ を C と D をそれぞれ $\delta/(2R)$ -被覆とする。ただし, $N_C = N(C, \delta/(2R))$ とおき, $N_D = N(D, \delta/(2R))$ とおく。このとき, $\{U_i V_j\}_{1 \leq i \leq N_C, 1 \leq j \leq N_D}$ が CD の δ -被覆になることを証明する。自然数 $1 \leq i \leq N_C$ と $1 \leq j \leq N_D$ を固定する。このとき, 任意の $c_1, c_2 \in U_i$ と任意の $d_1, d_2 \in V_j$ に対して,

$$|c_1 \cdot d_1 - c_2 \cdot d_2| \leq |c_1| |d_1 - d_2| + |d_2| |c_1 - c_2| \leq R \cdot \delta/(2R) + R \cdot \delta/(2R) = \delta \quad (4)$$

が成り立つ。ゆえに, $U_i V_j$ の直径は高々 δ である。さらに,

$$CD \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq N_C, 1 \leq j \leq N_D} U_i V_j$$

は明らかに成り立つ。よって,

$$N(CD, \delta) \leq N_C \cdot N_D = N(C, \delta/(2R)) \cdot N(D, \delta/(2R))$$

を得る。以上から,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(CD) &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(CD, \delta)}{-\log \delta} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(C, \delta/(2R))}{-\log(\delta/2R) - \log(2R)} + \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(D, \delta/(2R))}{-\log(\delta/2R) - \log(2R)} \\ &= \overline{\dim}_B C + \overline{\dim}_B D \end{aligned}$$

が従う。 $\square$

上の証明はフラクタル幾何学の専門的な知識を特に必要としないが, upper box 次元の典型的な性質を使うことでよりシンプルに証明することができる。

補題 2 の別証明. 写像 $\phi : C \times D \rightarrow \mathbb{R}$ を $\phi(c, d) = cd$ と定める。ただし, $C \times D = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 : c \in C, d \in D\}$ である。写像 ϕ が Lipschitz 連続であることを証明する。まず, $C \subseteq [-R, R]$ と $D \subseteq [-R, R]$ を満たす実数 R をとる。このとき, 三角不等式から

$$|\phi(c_1, d_1) - \phi(c_2, d_2)| = |c_1||d_1 - d_2| + |d_2||c_1 - c_2| \leq 2R\|(c_1, d_1) - (c_2, d_2)\|$$

が任意の $c_1, c_2 \in C$ と任意の $d_1, d_2 \in D$ に対して成り立つ。ただし, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^2$ 上の Euclid ノルムとする。したがって, ϕ は Lipschitz 連続である。よって, [F, Proposition 2.5 and Product formula 7.5] により,

$$\overline{\dim}_B(CD) = \overline{\dim}_B \phi(C \times D) \leq \overline{\dim}_B(C \times D) \leq \overline{\dim}_B C + \overline{\dim}_B D$$

が成り立つ。

□

参考文献

- [D] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd edn., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74 (Springer, 1980) revised by H. L. Montgomery.
- [E] L. Euler, Variar observationes circa series infinitas, *Comment. Acad. Sci. Petropol.*, **9** (1744), 160?188. [In Opera omnia I.14, 216?244, Teubner, Lipsiae et Berolini, 1924.]
- [F] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, (2014).
- [H] T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclids Elements, vol. 2, University Press, Cambridge, 1908; 2nd edition. reprinted by Dover, New York, (1956).
- [M] R. Meštrović, Euclid’s theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proofs (300 B.C.-2017) and another new proof, *preprint*, (2018), <https://arxiv.org/abs/1202.3670>.
- [R] J. C. Robinson. *Dimensions, Embeddings, and Attractors*, Cambridge University Press, (2011).
- [S] K. Saito, A fractal proof of the infinitude of primes, (*preprint*), available at <https://arxiv.org/abs/1810.05955>.