調和解析的視点による有限群の部分集合による近似

Approximation of finite groups by their subsets from the viewpoint of Harmonic analysis

広島大学大学院 理学研究科 数学専攻
梶浦 大起 (Hiroki KAJIURA)

概要

濃度が大きな有限群 G 上の複素数値函数 f の平均 $I_G(f) := (1/\#G)\sum_{x\in G} f(x)$ は数値計算する場合に時間がかかる。そこで，方針として G の濃度が小さな “よい部分集合”X による平均 $I_X(f) := (1/\#X)\sum_{x\in X} f(x)$ で近似すること，つまり，様々な函数 f の近似誤差 $\mathrm{Err}_X(f) := |I_G(f) - I_X(f)|$ が小さくなる X で計算をしたい。我々は近似誤差を f の尺度 $V_G(f)$ と X の尺度 $\mathfrak{d}(X)$ を定義し $\mathrm{Err}_X(f) \leq V_G(f)\mathfrak{d}(X)$ と上から抑えられることを示した。本講演では，① $\mathfrak{d}(X)$ と G の difference set との関係や②不等式の背景を紹介する予定である。

0 記号のお約束

G を有限群，$X \subset G$（構造には頓着しないことに注意），$f \in \mathbb{C}^G$（すなわち，G 上の複素数値函数），χ_ρ を（通常）表現 ρ に対応する指標，$\widehat{G}$ を G の既約表現の同型類全体，1_G を（既約な）自明表現とする。

1 本講演の問題と予備知識

最初に，標語的な形で本講演で紹介する問題とその（部分的な）答えを述べる:

本講演の問題と答え

問題 <u>G **上の平均**を X **上の平均**で近似する</u>とき, G の近似しやすさを決定する G の性質は何か？
答え X の近似の上手さに関する尺度をひとつ定義し，次のような性質を満たすことを示した:
共役類が多い G **は近似しやすい。**

もう少し詳細に問題を述べる。G **上の平均** $I_G(f)$ と X **上の平均** $I_X(f)$ は次で定義される:

$$I_G(f) := \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G} f(x), \quad I_X(f) := \frac{1}{\#X}\sum_{x\in X} f(x).$$

このとき，$I_G(f)$ を $I_X(f)$ で近似するときの誤差，すなわち

$$\mathrm{Error}_X(f) := |I_G(f) - I_X(f)|$$

がより小さくなるのはどのような群 G か？ という問題である。

$\mathrm{Error}_X(f)$ は f と X どちらにも依存するため，誤差にどれくらい X の近似の上手さが寄与するかを考えることが難しい。そこで，少々技巧的であるが，Peter–Weyl の定理による分解 $f=\sum_{\rho\in\widehat{G}} f_\rho$ を考え，自明表現に対応する部分[*1]以外の L^2-ノルムの和 $\|f\|_{\widehat{G}}$ を f の尺度とする[*2]。

このとき，次の定理から我々は X の近似の上手さに関する尺度をひとつ定義することができる:

定理 1（有限群上の Koksma-Hlawka 型不等式） $f\in\mathbb{C}^G$ と $X\subset G$ について，次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{Error}_X(f)\le\|f\|_{\widehat{G}}\mathfrak{d}(X).$$

ここで，$\|f\|_{\widehat{G}}$ と $\mathfrak{d}(X)$ は次で定義される:

$$\|f\|_{\widehat{G}}:=\sum_{\substack{\rho\in\widehat{G}\\ \rho\neq 1_G}}\dim\rho\|f_\rho\|,\quad \mathfrak{d}(X):=\max_{\substack{\rho\in\widehat{G}\\ \rho\neq 1_G}}\sqrt{\frac{1/\dim\rho}{\#X^2}\sum_{x,y\in X}\chi_\rho(xy^{-1})}.$$

また，f_ρ は f の Peter-Weyl の定理による分解 $f=\sum_{\rho\in\widehat{G}} f_\rho$ とする。

この結果から，本講演では**「G を上手く近似できる X」とは「同濃度の部分集合の中で $\mathfrak{d}(X)$ が最小になるもの」である**と考え，その尺度を使って G を上手く近似できる X を調べる。

2 近似しやすい G の性質について

$\mathfrak{d}(X)$ の下限について次のような定理を示した:

定理 2 $X\subset G$ について次の不等式が成り立つ:

$$\mathfrak{d}(X)\ge\sqrt{\frac{1/\#X-1/\#G}{\#G-1}}.$$

また，X **が difference set**[*3]ならば等号が成立する（特に，G が可換群ならその時に限る[*4]）。

この不等式から，「有限群 G そのものに関する G の近似しやすさ」みたいなものを理解する尺度が考えられる。具体的にいうと，G の共役類が多ければ多いほど $\mathfrak{d}(X)$ の下限が小さくなり，$\mathfrak{d}(X)$ がより小さい X（つまり，上手に近似できる X）が存在する可能性があるということがわかる。実験的にも $\mathfrak{S}_3$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の方がより近似しやすい（つまり，同濃度では $\mathfrak{d}(X)$ が小さくなることが多い）ことを示した。

3 本講演の背景

ここでは，Koksma-Hlawka 型の不等式がどこからでてきたのか？ という背景について述べる。詳細な証明などは [1] や [2] などを参照されたい。まず最初に，区間 $[0,1)^s$ 上の “よい” 実函数空間 H

[*1] すなわち，定数函数部分であり，$I_G(f)$ と一致する。

[*2] これは f の「変動」のようなものがどれくらい大きいかということを表すような尺度であると思える。

[*3] X が difference set であるとは，任意の単位元以外の G の元 a に対して，$\#\{(x,y)\in X\times X\mid a=xy^{-1}\}$ が一定となることである。

[*4] 非可換群であれば G が difference set でなく最良の場合が見つかっている。

（少なくとも，可積分性は要求されているものとする）における Monte Carlo 積分を以下で定義する:

定義 3（Monte Carlo 積分） $f \in H$ について，f の Monte Carlo 積分 $I(f)$ を次で定義する:

$$I_X(f) := \sum_{x \in X} f(x)$$

ここで，X は $[0,1)^s$ 上で "ランダムに選んだ" 点集合である。

Monte Carlo 積分は金融工学などにおけるシミュレーション等で様々な工学領域に応用されている。MonteCarlo 積分の収束の速さについて，次のような定理が一般に知られている:

事実 4（Monte Carlo 積分の収束の速さ [2]） $\left| \int_{[0,1)^2} f(x)dx - I_X(f) \right| = O(\#X^{-1/2})$

つまり十分な精度を出したいときに点集合を "ランダムに選んだ" 場合，真の積分値との誤差を 1 桁減らすためには 100 倍の点集合が必要である。これは実用上大きな痛手となりやすい。そのため，"ランダムに選ぶ" のではなく，都合が良く積分できる点集合を決定論的に選ぶ。そうすることで，より高速な収束を実現することを目標とする **quasi-Monte Carlo 積分（QMC）**という分野がある。

最後に，この分野で知られている古典的な定理として Koksma-Hlawka の不等式を紹介し，ひとつふたつの余談を述べておわる。:

事実 5（Koksma-Hlawka の不等式 [1]） H を区間 $[0,1)$ 上の "全変動有界" な関数のなす空間とする。また，$X \subset [0,1)$ を有限部分集合としたとき，任意の $f \in H$ に対して，

$$\left| \int_{[0,1)^2} f(x)dx - I_X \right| \leq V(f) D^\star(X)$$

ここで，$V(f)$ は f の "全変動"，$D^\star(X)$ は star-Discrepancy と呼ばれる X に関する尺度である。

この定理に関して，充分に濃度が大きな X について，$D^\star(X) = O((\log \#X)^s / \#X)$ を満たす点列（すなわち，"ランダムに選ぶ" より効率の良い点列）の構成法などが示されている [1]。さらに H を再生核 Hilbert 空間などに限定することで，再生核を用いてより精密な Koksma-Hlawka 型の不等式を示すことなども広く研究されている [2]。

参考文献

[1] H. Niederreiter, *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[2] J. Dick and F. Pillichshammer, *Digital Nets and Sequences: Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press,2010.