

σ -finite invariant densities for essentially conservative Markov operators via the induced operators

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
豊川永喜 (Hisayoshi TOYOKAWA)

概要

力学系に対する不変測度の存在は、その力学系の統計的性質を調べる上で必要不可欠なものでありエルゴード理論の基本的な問題の一つである。本レポートでは、確率空間上の可測力学系に対して、その台がほとんど全ての軌道を吸引する不変確率測度または σ -有限不変測度が存在するための必要十分条件について新たに得られた結果、さらにランダム力学系に応用可能なマルコフ作用素に対して拡張した結果について報告する。

1 導入

(離散) 力学系とは集合 X (相空間) と写像 $T : X \rightarrow X$ (変換) の組 (X, T) である。特に $(X, \mathcal{F}, m)$ が確率空間 (すなわち $\mathcal{F}$ は X の σ -代数、 m は $(X, \mathcal{F})$ 上の確率測度) で変換 T が可測 (すなわち $A \in \mathcal{F}$ であれば $T^{-1}A \in \mathcal{F}$) であるとき力学系 $(X, \mathcal{F}, m, T)$ を可測力学系と呼ぶ。ここで観測可能性を意味する確率測度 m は多くの場合ルベーグ測度など自然に導入される測度が想定されており、基本測度と呼ばれる。力学系では初期点 $x_0 \in X$ を与えた時の軌道 $\{T^n x_0\}_{n \geq 0}$ (ただし $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$: n 回合成) の長期予測を基礎におく。しかし当然 X 上の全ての初期点から出発する軌道を全て観測することは多くの場合難しく、その代わりに初期分布をひとつ与えた時にその分布が力学系の時間発展によって漸近的にどのように遷移していくかを考察する。すなわちその力学系において多くの軌道はどこに高い頻度で滞在しているかを統計的に調べるのが重要となる。まず初めに力学系の統計的性質に関する基本的な性質を述べるために必要な定義を与える。

定義 1.1. 力学系 $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ が保測力学系である (または μ が不変測度である) とは、任意の $A \in \mathcal{F}$ で $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ が成立することをいう。また、力学系 $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ がエルゴード的であるとは、 $T^{-1}E = E$ なる集合 $E \in \mathcal{F}$ は必ず $\mu(E) = 0$ または $\mu(E^c) = 0$ を満たすことをいう。

注意 1.1. エルゴード性は力学系が次の意味で分解不可能であることを保証している。すなわち、ある可測集合 E があって $T^{-1}E = E$ が成立しているとする。この時、 $T^{-1}E^c = E^c$ でもあるから相空間は $X = E \cup E^c$ とふたつの T -不変集合に分割されることを意味する。しかし系がエルゴード的である時 E または E^c は零集合であるから、このように相空間を互いに影響を与え合わない不変集合によって分解することは測度の意味で出来ないということである。

保測力学系の基本的な性質として、以下に Boltzmann のエルゴード仮説の数学的な定式化である

Birkhoff の個別エルゴード定理を述べる.

定理 1.1 (Birkhoff の個別エルゴード理論). 保測力学系 $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ について, $\mu(X) = 1$ とする. この時任意の $f \in L^1(\mu)$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$$

がほとんど至る所の $x \in X$ について存在する. さらに系がエルゴード的である時, 任意の $f \in L^1(\mu)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \int_X f d\mu$$

がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する. $\square$

上述のエルゴード定理は決定論的な力学系に対して大数の法則を保証する定理である. 実際, 定理内で $f = 1_A$ (可測集合 A の定義関数) とすると, 主張は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_{T^{-i}A}(x) = \mu(A)$$

となり, T によって A を訪れる頻度は A の起こる確率に一致することを意味する.

例 1.1 (2 進展開). $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ を X のボレル集合族, λ を X 上のルベグ測度とする. この空間 $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ 上で次の変換を考える:

$$Tx = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

この力学系は実数の 2 進展開の表現となっている. すなわち任意の $x \in X \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]}$ は一意の 2 進展開

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots \quad (x_i \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

をもつが, 今, $[0] := [0, 1/2)$, $[1] := [1/2, 1]$ とおくと, $x \in X \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]}$ について $T^{n-1}x \in [0]$ であれば x の 2 進展開の n 桁目 x_n が 0, $T^{n-1}x \in [1]$ であれば x の 2 進展開の n 桁目 x_n が 1 となる. さらに簡単な計算から $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ はエルゴード的な保測変換となることが確認できる. そして上述の Birkhoff の個別エルゴード定理の主張から, ルベグ測度についてほとんど至る所の $x \in X$ は, 2 進展開した時に出現する数が 0 である頻度も 1 である頻度もそれぞれ共に $1/2$ に収束していくことがわかる.

不変測度が σ -有限な無限測度となる場合についても Hurewicz のエルゴード定理というものが知られており ([1] 参照), それ故, 力学系の統計的性質を調べる上で不変確率測度, または σ -有限な不変測度は不可欠となるものである. しかし一般に確率空間上の変換が与えられた時, 不変測度が存在する保証はない. そのため基本測度に絶対連続な不変確率測度, σ -有限不変測度はいつ存在するかという問題は古くから研究されてきた ([2, 3, 5, 6, 8, 10] 参照). ここで測度 μ が測度 m に絶対連続であるとは $m(A) = 0$ であれば必ず $\mu(A) = 0$ が成立することを指すが, この絶対連続性は基本測度 m で測って起こらない事象は不変測度 μ で測っても起こらないという自然な要請をしているものである.

本レポートの以下の節では基本測度に絶対連続な不変確率測度または σ -有限な不変測度が存在するための必要十分条件について述べる.

2 準備

この節では、力学系の時間発展を表す転送作用素、マルコフ作用素の定義と必要な道具となる誘導作用素およびジャンプ作用素について紹介する。

確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の可測変換 T が $m(A) = 0$ である可測集合 A に対し $m(T^{-1}A) = 0$ 、すなわち確率測度 $m \circ T^{-1}$ が基本測度 m に絶対連続であるとき、 T を非特異 (non-singular) 変換と呼ぶ。非特異な変換について、次のようにして転送作用素 (transfer operator/Perron-Frobenius operator) を定義できる。

定義 2.1. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \rightarrow X$ に関する転送作用素 P とは、

$$\int_X Pf \cdot g dm = \int_X f \cdot g \circ T dm \quad (f \in L^1, g \in L^\infty)$$

によって定まる L^1 上の有界線型作用素である。

非特異変換に関する転送作用素 P は力学系による分布の時間発展を表す作用素であり、 $P^n f$ は与えられた初期分布 f の n -単位時間後の分布関数そのものである。

次に非特異変換に関する転送作用素の一般化であるマルコフ作用素の定義を与える。

定義 2.2. 線型作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ がマルコフ作用素であるとは、 P が非負なる $f \in L^1$ に対し $Pf \geq 0$ かつ $\|Pf\|_1 = \|f\|_1$ を満たすものである時にいう。

注意 2.1. 上述の非特異変換に関する転送作用素は特にマルコフ作用素である。さらに、確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上で遷移確率 $P(x, A)$ ($x \in X, A \in \mathcal{F}$) で定まるマルコフ過程が与えられた時、その遷移確率が $m(A) = 0$ であればほとんど全ての $x \in X$ で $P(x, A) = 0$ を満たすならば、ラドン-ニコディム微分

$$Pf(x) = \frac{d \int_X f(y) P(y, \cdot) dm(y)}{dm}(x) \quad (f \in L^1)$$

によってマルコフ作用素 P を定めることができる。よってマルコフ作用素を考えることによって決定論的な力学系のみならずマルコフ過程で表されるランダム力学系に対しても本レポートでの結果を応用することが可能となる。

注意 2.2. マルコフ作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ が与えられた時、その共役作用素 P^* が L^∞ 空間上で以下の関係式で定まる：

$$\int_X Pf \cdot g dm = \int_X f \cdot P^*g dm \quad (f \in L^1, g \in L^\infty).$$

特にマルコフ作用素が非特異変換 T で定まる転送作用素である時、 $P^*g = g \circ T$ ($g \in L^\infty$) で与えられる。

注意 2.3. 簡単な計算から基本測度 m に絶対連続な不変確率測度 μ を求めることは、転送作用素 P について非負 L^1 関数なる不動点 $\frac{d\mu}{dm}$ (すなわち $P \frac{d\mu}{dm} = \frac{d\mu}{dm}$ なる関数) を求めることと同値であることがわかる。この対応は絶対連続な σ -有限な不変測度についても成立する。すなわち P は定義域を

$\mathcal{M}_+^\sigma = \{f : \text{非負可測関数で } \int f dm \text{ が } \sigma\text{-有限測度}\}$ に拡張することが可能であり、絶対連続な σ -有限不変測度の存在は、 $\mathcal{M}_+^\sigma$ 内における P の不動点の存在と等価である。

次に、 σ -有限不変測度を構成する際によく使われる誘導変換 (induced transformation), ジャンプ変換 (jump transformation), さらにその一般化である誘導作用素, ジャンプ作用素について紹介する。誘導作用素に関する詳細は [4], ジャンプ変換に関する詳細は [10] を参照されたい。

定義 2.3. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \rightarrow X$ について, ある可測集合 E が存在し $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}E = X \pmod{m}$ が成立する時, E への誘導変換 T_E は次のようにしてほとんど至る所で定義される:

$$T_E x = T^{\tau_E(x)} x \quad (\text{ただし } \tau_E(x) = \min\{n \geq 1 : T^n x \in E\}).$$

注意 2.4. 誘導変換は, 定義内の変換を E へ制限したもの $T_E|_E$ で定義される (そのため仮定も弱く $E \subset \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}E$ としたもの) ことが多いが本レポートでは不変測度に関する台の性質を導出する観点から X のほとんど至る所で定義されているものとする。

定義 2.4. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ についてある可測集合 E が存在し $\lim_{n \rightarrow \infty} (P^* I_{E^c}) 1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する時, E への誘導作用素 P_E は次のようにして L^1 上で定義される:

$$P_E = I_E P \sum_{n=0}^{\infty} (I_{E^c} P)^n \quad (\text{ただし } I_E f = f \cdot 1_E : \text{制限作用素}).$$

注意 2.5. 誘導作用素は L^1 空間上のマルコフ作用素である。さらに誘導変換 T_E に関する転送作用素は誘導作用素 P_E と一致している:

$$\int_X f \cdot g \circ T_E dm = \int_X P_E f \cdot g dm \quad (f \in L^1, g \in L^\infty).$$

すなわち誘導作用素は誘導変換の一般化である。

定義 2.5. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \rightarrow X$ について, ある可測集合 E が存在し $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}E = X \pmod{m}$ が成立する時, E に関するジャンプ変換 T^* は次のようにしてほとんど至る所で定義される:

$$T^* x = T^{e(x)+1} x \quad (\text{ただし } e(x) = \min\{n \geq 0 : T^n x \in E\}).$$

定義 2.6. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ についてある可測集合 E が存在し $\lim_{n \rightarrow \infty} (P^* I_{E^c}) 1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する時, E に関するジャンプ作用素 $\hat{P}$ は次のようにして L^1 上で定義される:

$$\hat{P} = P I_E \sum_{n=0}^{\infty} (P I_{E^c})^n.$$

注意 2.6. ジャンプ作用素は L^1 空間上のマルコフ作用素である。さらにジャンプ変換 T^* に関する転送作用素はジャンプ作用素 $\hat{P}$ と一致している:

$$\int_X f \cdot g \circ T^* dm = \int_X \hat{P} f \cdot g dm \quad (f \in L^1, g \in L^\infty).$$

すなわちジャンプ作用素はジャンプ変換の一般化である。

3 主結果

この節では確率空間上のマルコフ作用素に対する σ -有限不変密度関数，または非特異変換に対する絶対連続な σ -有限不変測度の存在のための必要十分条件に関して得られた結果をそれぞれ述べる．まず初めにマルコフ作用素に対する不変確率密度関数の存在に関する結果を述べる．

定義 3.1. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ が弱概周期的 (weakly almost periodic) であるとは，任意の $f \in L^1$ に関して $\{P^n f\}_{n \geq 0}$ が弱位相で相対コンパクト (つまり任意の部分列 $\{n_k\}_k$ に対しさらなる部分列 $\{n_{k_i}\}_i$ が取れて，任意の $g \in L^\infty$ に対し $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X P^{n_{k_i}} \cdot g dm$ が L^1 内に収束先を持つということ) である時にいう．また，マルコフ作用素 P が平均エルゴード的 (mean ergodic) であるとは，任意の $f \in L^1$ に関して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P^i f$ が L^1 -ノルムで収束することを言う．

定理 3.1 (T1). 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ について以下は同値である：

- 1 $Ph = h$ なる $h \in L^1_+$ が存在し， $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*n} 1_{[h>0]}(x) = 1$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立；
- 2 $\{P^n 1_X\}_{n \geq 0}$ が弱位相で相対コンパクト；
- 3 P が平均エルゴード的；
- 4 P が弱概周期的．□

特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時，上記の定理は次のように書き換えられる．

系 3.2 (T2). 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非特異な変換 $T : X \rightarrow X$ について以下は同値である：

- 1 絶対連続な不変確率測度 μ が存在し $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}[\frac{d\mu}{dm} > 0] = X \mod m$ を満たす；
- 2 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ が存在し， $m(A) < \delta$ ならば $\sup_{n \geq 0} m(T^{-n}A) < \varepsilon$ を満たす；
- 3 各 $E \in \mathcal{F}$ について， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m \circ T^{-i}(E)$ が存在．□

注意 3.1. 系 3.2 内の条件 1 は絶対連続な不変確率測度の台がほとんど全ての T による軌道を最終的に吸引することを主張している．この条件は力学系 $(X, \mathcal{F}, m, T)$ がエルゴード的である時は必ず満たされる条件である．

次に定理を述べるために必要な保存領域 (conservative part) と散逸領域 (dissipative part) の定義を与える．

定義 3.2. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \rightarrow L^1$ に対し，その保存領域 $\mathfrak{C}$ は

$$\mathfrak{C} = \left\{ x \in X : \sum_{n=0}^{\infty} P^n 1_X(x) = \infty \right\}$$

で与えられ，散逸領域 $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D} = X \setminus \mathfrak{C}$ で与えられる．

注意 3.2. 特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時、その散逸領域 $\mathfrak{D}$ は $T^{-i}W \cap T^{-j}W = \emptyset$ ($i \neq j$) となるような可測集合 W (このような W を遊走集合 (wandering set) と呼ぶ) たちの和集合で与えられることが知られている。

定義 3.3. 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素に対する保存領域 $\mathfrak{C}$ 、散逸領域 $\mathfrak{D}$ について、 $X = \mathfrak{C}$ の時その系を保存的 (conservative)、 $X = \mathfrak{D}$ の時その系を散逸的 (totally dissipative) とそれぞれ呼ぶ。また $P^*1_{\mathfrak{C}} \geq 1_{\mathfrak{C}}$ という性質から本質的に保存的 (essentially conservative) という定義を、 m に関してほとんど至る所の $x \in X$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*n}1_{\mathfrak{C}}(x) = 1$ が成立している時に与える。

注意 3.3. 非特異変換 T を考えた時、全体空間 X は

$$X = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}\mathfrak{C} \cup \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}\mathfrak{D}$$

と分割されるが、 $X = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}\mathfrak{C}$ であることが本質的に保存的であることと同値である。

注意 3.4. マルコフ作用素に非負なる不動点 $h \in L^1$ が存在する場合、 h の台について $[h > 0] \subset \mathfrak{C}$ が成立する。よって定理 3.1、系 3.2 の条件が成立する時、系は本質的に保存的である。

最後に主結果であるマルコフ作用素に対する σ -有限不変密度関数の存在に関する結果を述べる。

定理 3.3 (T3). 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ について以下は同値である：

- 1 $Ph = h$ なる $h \in \mathcal{M}_+^\sigma$ と可測集合 $A \subset [h > 0] \cap \mathfrak{C}$ が存在し、 $\int_A h dm < \infty$ を満たし更に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (P^*I_{A^c})^n 1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立；
- 2 ある可測集合 E 上の誘導作用素 P_E に対し $P_E h_0 = h_0$ なる $h_0 \in L_+^1$ が存在し、 $[h_0 > 0] = E$ を満たす；
- 3 ある可測集合 E に関するジャンプ作用素 $\hat{P}$ が弱概周期的。□

注意 3.5. 定理 3.3 の条件 1、2 が成立する時、系は本質的に保存的である。

特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時、上記の定理は以下のようにかける。

系 3.4 (T4). 確率空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非特異な変換 $T : X \rightarrow X$ について以下は同値である：

- 1 絶対連続な σ -有限不変測度 μ と可測集合 $A \subset [\frac{d\mu}{dm} > 0] \cap \mathfrak{C}$ が存在し、 $\mu(A) < \infty$ を満たし更に、 $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}A = X \pmod{m}$ を満たす；
- 2 ある可測集合 E 上の誘導変換 T_E に対し $m|_E$ に同値な不変確率測度が存在；
- 3 ある可測集合 E に関するジャンプ変換 T^* が絶対連続な不変確率測度 ν を持ち、 $\bigcup_{n \geq 0} T^{*-n}[\frac{d\nu}{dm} > 0] = X \pmod{m}$ が成立。□

注意 3.6. 定理 3.3 および系 3.4 内の条件 3 はジャンプ作用素、ジャンプ変換に対し定理 3.1、系 3.2 内の同値条件をそれぞれ満たすことと対応している。

定理 3.3, 系 3.4 は本質的に保存的である系の絶対連続な σ -有限不変測度の存在に関する主張であるが, 今後の展望として, 散逸領域が残り続ける系 (すなわち $\bigcap_{n \geq 0} T^{-n} \mathfrak{D}$ が正の測度で存在する系) について, 絶対連続な σ -有限不変 (無限) 測度が存在するための必要十分条件について考察していく.

4 具体例

この節では, 得られた結果を応用することが可能なランダム力学系の具体例を与える.

例 4.1. 単位区間のルベグ空間 $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ 上の非特異変換 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を任意に与えた時, この力学系に加法的ノイズを与えたランダム力学系 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ 上の確率変数として次のように考える:

$$X_{n+1}(\omega) = TX_n(\omega) + \xi_n(\omega) \pmod{1}$$

($\omega \in \Omega, n \geq 0$). ただし, $X_0, \xi_0, \xi_1, \dots$ は独立な $[0, 1]$ 値確率変数で 初期分布 X_0 は確率密度関数 f_0 に, ノイズの列 $\xi_0, \xi_1, \dots$ は同じ確率密度関数 g にそれぞれ従うとする. この時,

$$\nu(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in A\}) = \int_A P^n f_0 d\lambda \quad (A \in \mathcal{A})$$

の意味で時間発展を表すマルコフ作用素は次のように与えられる:

$$Pf(x) = \int_{[0,1]} f(y) \left(\sum_{i=0}^1 g(x - Ty + i) \right) d\lambda(y).$$

[9] の結果から, このマルコフ作用素 P は弱概周期的であることがわかる. よって定理 3.1 からこのマルコフ作用素 P は不変確率密度関数 h を持ち, h の台は $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*n} 1_{[h>0]} = 1$ を満たす.

例 4.2. 単位区間のルベグ空間 $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ 上のふたつの非特異変換 $T_1, T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を次で与える:

$$T_1 x = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \in [0, 1/2) \\ -2x + 2 & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$T_2 x = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

このふたつの変換から次のマルコフ過程の遷移確率を考える:

$$P(x, A) = p 1_{T_1^{-1}A}(x) + (1-p) 1_{T_2^{-1}A}(x) \quad (x \in [0, 1], A \in \mathcal{B}).$$

ただし $0 \leq p \leq 1$ はパラメータであり, $p = 0$ または 1 の時は決定論的な力学系となり λ に同値な σ -有限不変無限測度をそれぞれ持つことが知られている ([10] 参照). このランダム力学系は, 確率 p で T_1 を, 確率 $1-p$ で T_2 をそれぞれ選択し反復していく系である. [7] の結果からこのランダム力学系を表すマルコフ作用素 P について, 集合 $[1/2, 1]$ に関するジャンプ作用素が弱概周期的となることがわかる. すなわち定理 3.3 の具体例となることがわかる. すなわち σ -有限不変密度関数 h を持ち 集合 $A = [1/2, 1] \subset [h > 0] \cap \mathbb{C}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{*n} 1_{A^c} = 0$ を満たす.

参考文献

- [1] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, American Mathematical Society (1997).
- [2] David W. Dean, and L. Sucheston, *On Invariant Measures for Operators*, Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Geb. **6** (1966): 1-9.
- [3] Eduard Yu. Emel'yanov, *Invariant Densities and Mean Ergodicity of Markov Operators*, Israel Journal of Mathematics, **136** (2003): 373-379.
- [4] S. R. Foguel, *The Ergodic Theory of Markov Processes*, Van Nostrand Mathematical Studies 21 (1969).
- [5] A. Hajian, and S. Kakutani, *Weakly wandering sets and invariant measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964): 136-151.
- [6] P. R. Halmos, *Invariant measures*, Annals of Math. **48** (1947): 735-754.
- [7] T. Inoue, *Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters*, Studia Math. **208** (2012): 11-29.
- [8] Y. Ito, *Invariant Measures for Markov Processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964): 152-184.
- [9] Y. Iwata, and T. Ogihara, *Random perturbations of non-singular transformation on $[0,1]$* , Hokkaido Math. Journal **42** (2013): 269-291.
- [10] M. Thaler, *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel J. Math. **37** No.4 (1980): 303-314.
- [11] H. Toyokawa, *Asymptotic behavior of the iterates of weakly almost periodic Markov operators and invariant densities*, preprint.