連続力学系の可積分性とその周辺

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
本永翔也 (Shoya MOTONAGA)

本稿では分野外の方向けに可積分判定およびその周辺の入門的な内容を紹介する．不十分な議論や不正確な記述が多くなるが，その点はご容赦願いたい．

1 可積分性についての導入と歴史

常微分方程式 (ODE) を「解く」ことを考える．次の事実は基礎的だが重要である．

定理 1 (ODE の初期値問題の局所解の存在と一意性)**.** 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$x(t_0) = x_0$$

に対して，f が x についてリプシッツ連続ならば時間局所解は存在して一意的である．

より正確な主張や詳細については常微分方程式の教科書を参照されたい．この定理は局所解についてしか存在と一意性を保証しないが，発見的に大域解を見つけた場合には，上の定理によって一意性は従う．

一般解を求めることを考えよう．そのためにいくつかの基本的な例を復習しておく．

例 1. $\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
は $\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$ より $t + C = \int \frac{dx}{f(x)}$（$C$：任意定数）．$F(x) := \int \frac{dx}{f(x)}$ とし，逆関数 F^{-1} を許せば

$$x = F^{-1}(t + C)$$

と解くことができる．

例 2. $\dot{x} = x/t, \quad x \in \mathbb{R}, t \neq 0$
は $u = x/t$ と置くことで $u + t\dot{u} = u$ となるので $u = C$（C:任意定数）となり一般解 $x = Ct$ である．(注意：変数分離法でも解くことができる．)

例 3. $\ddot{x} = x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$
は両辺に $\dot{x}$ をかけて積分すると，$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{4}(2\dot{x}^2 - 2x^2 + x^4)$ とおけば方程式の解 x に対して $H(x, \dot{x}) = C$（C：任意定数）となる．$\dot{x}$ について整理すれば $\dot{x} = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$ という一階の微分方程式になり，例 1 に帰着される．$H(x, \dot{x})$ のように，方程式の解に対し一定であるような関数を**保存量**または**第一積分**と呼ぶ．

例 1,2,3 は代表的な「解くことができる」例といえる．参考として「素朴には解けない」例もあげておこう．どのような意味で「解けない」のか，なぜ「解けない」のかについてはここでは省略する．

例 4. *Airy* 方程式：$\ddot{x} = tx, \quad x \in \mathbb{R}$.

例 5. *Duffing* 方程式：$\ddot{x} = x - x^3 + \varepsilon \cos t, \quad x \in \mathbb{R}$. ここで ε は微小パラメータ．

1.1 可積分性

常微分方程式が解けることの背景の一つとして例 2 のように保存量を見つけることにより，一つの変数について解く（保存量が定める超曲面に方程式を制限して考える）ことで方程式の次元を下げることが考えられる．また，例 3 のような変数変換の背景には対称性があり，これを見つけることでやはり方程式の次元を下げることができる．これらによって方程式の次元が 1 次元にまで下がれば，例 1 より，方程式は解けるといえる．さらに，ハミルトン系と呼ばれる数理物理学的に自然な方程式系（これは偶数次元の系になっている）では保存量の存在と対称性の存在が対応していることが知られており（Noether の定理），そのため方程式の次元を 1 次元まで下げるには，方程式の次元の半分の保存量があればよい．簡単のためユークリッド空間に限って，これを定式化しよう．

関数 $H(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ に対する**ハミルトンベクトル場**とは次式で与えられるものである：

$$X_H(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_m}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial x_m} \right)^\top .$$

このとき，H は**ハミルトニアン**と呼ばれ，ハミルトンベクトル場で定まる力学系（微分方程式系）を**ハミルトン系**という．

定義 1. ハミルトンベクトル場 X_H が **Liouville 可積分**
:⇔ m 個の関数 $F_1 = H, ..., F_m$ が存在して次を満たす：

- $\{F_i, F_j\} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \right) = 0.$
- $dF_1, ..., dF_n$ は稠密な開集合上一次独立である．

また F_i が全て解析関数である場合には解析的可積分と呼ぶなど，関数のクラスに応じて可積分性のクラスを定義する．

ハミルトンベクトル場が Liuouville 可積分であるとき，この方程式は求積法によって解くことができることが知られており，これは幾何学的には解軌道がトーラス上の線形フローに変換可能なこととして捉えられることが知られている（Liouville-Arnold の定理 [1]）．また，

- $\{F_i, F_j\} = X_{F_i}(F_j) = -X_{F_j}(F_i).$
- $[X_{F_i}, X_{F_j}] = X_{\{F_i, F_j\}}$

であるので，$\{F_i, F_j\} = 0$ は

- 関数 F_j はハミルトンベクトル場 X_{F_i} の保存量であり，かつ関数 F_i はハミルトンベクトル場

X_{F_j} の保存量である．

- ハミルトンベクトル場 X_{F_i} と X_{F_j} は Lie 括弧の意味で可換である．つまり X_{F_i} の定めるフローと X_{F_j} の定めるフローは互いに可換である．

ということを意味する．定義のうちの一次独立性に関する条件は，例えば $H(x,y) = const$ と $H^2(x,y) = const$ は方程式の次元を下げる上では本質的に同じものであるので，そのようなものを避けるために課す条件である．歴史的な流れとしては随分と後になるが，ハミルトン系の Liouville 可積分性を一般の自律的力学系に拡張したものとして，しばしば Bogoyavlenskij [3] による次の可積分性も用いられる．

定義 2. n 次元可微分多様体上の滑らかなベクトル場 X が定める自律的力学系 $\dot{x} = X(x)$ が **Bogoyavlenskij の意味で可積分**である [3] とは次の条件を満たすベクトル場 $X_1 = X, ..., X_r$ と関数 $F_1, ..., F_{n-r}$ が存在することをいう：

(i) $[X_i, X_j] = 0$ であり $X_1, ..., X_r$ は稠密な開集合上一次独立である．
(ii) $X_i(F_j) = 0$ であり $dF_1, ..., dF_{n-r}$ は稠密な開集合上一次独立である．

特に，ハミルトンベクトル場が Liouville 可積分であるときには，$n = 2m$ として，$r = m$ かつ X_i が F_i に対するハミルトンベクトル場であるとすれば，Bogoyavklenskij 可積分である．この意味で Bogoyavklenskij 可積分性は Liouville 可積分性の拡張になっている．また，Bogoyavlenskij 可積分であるときには Liouville-Arnold の定理と同様の主張も成り立つことが知られている．

1.2 Poincaré による制限三体問題の研究

与えられた系に対して可積分性を考えるのは自然な問であるが，それに答えるのは非常に難しい．可積分であることを示すには保存量あるいは可換なベクトル場を見つければよいが，一般に見つけるのは困難であるし，逆に可積分でないことを示すにはどんな関数やベクトル場も保存量や可換なベクトル場にはなり得ないことを確認しなければならないためである．どんな系も実は可積分であるか，あるいは非可積分な系が存在するのかさえ全くわかっていない状況の中，当時大きな関心が寄せられていた多体問題に対し Poincaré は制限三体問題の非可積分性を証明した [7]．実際には，可積分な 2 自由度ハミルトン系が摂動を受ける場合に対して，摂動パラメータについて解析的な第一積分で，ハミルトニアンと独立なものが存在しないことを一般的な条件のもとで示し，制限三体問題にこれを適応している．これは，摂動を受けるハミルトン系の可積分性に関する代表的な結果のひとつであり，非摂動系における第一積分や対応する可換なハミルトンベクトル場が，一般的に摂動によって失われることを意味する．

また，解析的なアプローチだけでなく，解軌道の挙動に着目して現在でいうところの力学系的な観点から制限三体問題を考えていくことで，Poincaré は安定多様体と不安定多様体の横断的交差という現象に至った．これは現在ではカオスと呼ばれる現象の一つとして知られており，この振る舞いのメカニズムを簡略化したものの一つとして馬蹄写像というものが知られている．対象の系がこのようなカオスの機構を持つことを解析する手法として代表的なものの一つに以下のメルニコフの方法が知られている．

1.3 メルニコフの方法

ここでは横断的ホモクリニック軌道の存在を解析するための手法として知られるメルニコフの方法について概説する．その標準的な方法 [4,8] では，次のような 1 自由度ハミルトン系が周期的摂動を受ける場合が取り扱われる．

$$\dot{x} = X_H(x) + \varepsilon g(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1 \tag{1}$$

ここで，ε は微小パラメータを表し，$x = (x_1, y_1)^\top \in \mathbb{R}^2$，$\theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ($T > 0$ は定数) である．また， $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ および $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ は，それぞれ，C^3 級および C^2 級である．$H(x)$ が非摂動系のハミルトニアンである．次を仮定する．

(M) $\varepsilon = 0$ のとき，式 (1) においてホモクリニック軌道 $q^0(t)$ を有する双曲的鞍点 p が存在する．すなわち，

(i) $X_H(p) = 0$

(ii) 行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} \end{pmatrix} (p)$ は実部が正の固有値と実部が負の固有値を一つずつ持つ．

(iii) $q^0(t) \to p \quad (t \to \pm\infty)$

このとき，ホモクリニック軌道に対する**メルニコフ関数**

$$M(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} DH(q^0(t)) \cdot g(q^0(t), t + \tau) dt \tag{2}$$

が単純な零点をもつならば，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，式 (1) において横断的ホモクリニック軌道が存在する [4]．これは系の軌道の中に馬蹄写像が埋め込まれており，軌道がカオス的に振る舞うことを意味している．

また，余談であるが，これと類似した手法により，摂動系における周期軌道の存在を示すこともできる．条件 (M) の代わりに，次を仮定する．

(M') $\varepsilon = 0$ のとき，式 (1) は周期 T^α の周期軌道の 1 パラメータ族 $q^\alpha(t)$，$\alpha \in (-1, 0)$，をもつ．

このとき，$lT^\alpha = mT$ ($l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素) を満たし，周期軌道に対する**メルニコフ関数**

$$M^{m/l}(\tau) := \int_0^{mT} DH(q^\alpha(t)) \cdot g(q^\alpha(t), t + \tau) dt \tag{3}$$

が単純な零点をもつならば，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，式 (1) において周期 mT の周期軌道 (m 次分数調波または m/ℓ 次超分数調波) が存在する [4,8]．

Poincaré は制限三体問題の研究でカオス現象に出会っていたわけであるが，実現象においてカオス挙動が広く知られるにはコンピュータシミュレーションの発達を待つ必要があった．コンピュータシミュレーションによってようやくカオス挙動が視覚化されたのである．

一方で，カオス的に振る舞う系の多くは非可積分であることが知られており，非可積分であればカオス挙動を示すことが期待されるため，カオス挙動のような複雑な挙動を捕えるにあたって，系の非可積分性を示すことも重要であると考えられるようになってきた．

2　可積分判定手法

連続力学系の可積分性を判定する方法は現在ではいくつかの方法が知られているが，ここでは変分方程式に着目した手法を紹介する．

2.1　変分方程式

自律的な n 次元連続力学系を考える：

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{K}^n \tag{4}$$

ただし $f = (f_1, ..., f_n)^\top : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ は適当な滑らかさを持つベクトル場であり，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である．(4) が特解 $x = \phi(t)$ を持つとする．このとき (4) の $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式とは次式で与えられる時間依存する係数行列を持つ線形微分方程式系である：

$$\dot{\xi} = Df(\phi(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{K}^n \tag{5}$$

ただし

$$Df(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\phi(t)).$$

変分方程式 (5) は元の方程式 (4) において $x(t) = \phi(t) + \varepsilon\xi(t) + O(\varepsilon^2)$ としたときの ε についての一次の項がしたがう方程式である．変分方程式は元の方程式の性質をよく反映しており次のようなことがしたがう．

命題 1. 連続力学系 (4) が保存量（第一積分）$F(x)$ を持つとする．このとき (4) の $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式 (5) は時間依存する第一積分 $DF(\phi(t)) \cdot \xi$ を持つ．

一般に，時間依存する線形微分方程式の解析も難しいが，非線型方程式を解析するよりは容易であることが期待される．このような性質に着目し，さらに複素化して特異点解析の視点に立ったハミルトン系の可積分判定手法として，モノドロミー群を用いた Ziglin 解析や，その延長として微分 Galois 群を用いた Morales-Ramis 理論 [6]，これを一般の自律的力学系に拡張した Ayoul-Zung による結果 [2] などが知られている．

定理 2 (Morales-Ramis, Ayoul-Zung)**.** 連続力学系 (4) が有理型可積分であるならば，(4) の特解 $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式 (5) の微分 Galois 群 $G = DGal(L/\mathcal{M}(\phi(t)))$ の単位成分は可換である．ここで L は (5) の Picard-Vessiot 拡大，$\mathcal{M}(\phi(t))$ は $\phi(t)$ が定める Riemann 面上の有理型関数体である．

微分ガロア群と Picard-Vessiot 拡大の定義は [6] を参照されたい．この定理により，可積分性の障害を微分ガロア群によって見つけられる．こうした可積分判定手法は強力であるものの，現在でも系の可積分性の分類は一般には分かっていない（部分的な結果として斉次ポテンシャル系の可積分性は分類されている）．

また，Morales-Ruiz [5] は，式 (1) が $\varepsilon > 0$ のときも (非自励的な) ハミルトン系となる場合に対して，ホモクリニック軌道まわりの変分方程式の微分ガロア群が可換になるならば，ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数 (2) が恒等的に零となることを示している．

3 第一積分，周期軌道，可換なベクトル場の保存

以上のようなことから，一般に解析的に解くことが不可能で，カオスのような複雑な挙動を示す可能性のある力学系に対して，周期軌道やホモクリニック軌道，第一積分や可換なベクトル場を求める，あるいはそれらの存在を示すことは力学系の研究において基本的かつ重要な問題の一つといえる．最近 (1) のような摂動系のように，周期軌道あるいはホモクリニック軌道と，第一積分あるいは可換なベクトル場をもつ微分方程式系が摂動を受けるとき，それらが微小変化を許して存在し続けるための必要条件，すなわち，それらが保存されないための十分条件が得られたので，以下ではその結果を紹介する．

$\mathscr{M}$ を向きづけられたパラコンパクトな C^3 級 n 次元実多様体とする．以下では，ベクトル場はすべて $\mathscr{M}$ 上で C^2 級，第一積分は C^3 級とする．また，パラメータ ε に依存する場合は，それらは ε について C^2 級とする．

X_ε を $\mathscr{M}$ 上のベクトル場で， $X_\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + O(\varepsilon^2)$ であるとする．

3.1 周期軌道

以下を仮定する．

(A1) 定数 $T > 0$ に対して X^0 は T-周期軌道 $\gamma(t)$ をもつ．
(A2) X^0 は定数でない第一積分 F をもつ．

$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, T]\}$ とする．また，次の積分を定義する：

$$\mathscr{I}_{F,\gamma} := \int_0^T dF(X^1)(\gamma(t))dt \tag{6}$$

定理 3. 条件 (A1) と (A2) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において第一積分 $F_\varepsilon = F + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\mathscr{I}_{F,\gamma} = 0$ が成立する．

定理 4. 条件 (A1) と (A2) を仮定する．X_ε が周期 $T_\varepsilon = T + O(\varepsilon)$ の周期軌道 γ_ε で $\gamma_0 = \gamma$ を満たすものをもつならば，$\mathscr{I}_{F,\gamma} = 0$ が成立する．ここで，$\varepsilon = 0$ のときの γ_ε を γ_0 とする．

定理 3 と定理 4 は，$\mathscr{I}_{F,\gamma} \neq 0$ であるならば摂動系において第一積分 F と周期軌道 $\gamma(t)$ が保存していないことを意味する．

条件 (A1) と (A2) に加えて，次を仮定する．

(A3) X^0 は可換なベクトル場 Z をもつ．

次の積分を定義する：

$$\mathscr{J}_{F,Z,\gamma} := \int_0^T dF([X^1, Z])(\gamma(t))dt$$

ここで，$[\cdot,\cdot]$ はリー括弧である．

定理 5. 条件 (A1)，(A2) と (A3) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において可換なベクトル場 $Z_\varepsilon = Z + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\mathscr{J}_{F,Z,\gamma} = 0$ が成立する．

3.2 周期軌道に対するホモクリニック軌道

条件 (A1) の代わりに次の条件を考える：

(A1)' X^0 は周期軌道 $\gamma(t)$ に対するホモクリニック軌道 $\gamma^{\mathrm{h}}(t)$ をもつ．

$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ および $\Gamma^{\mathrm{h}} := \Gamma \cup \{\gamma^h(t) : t \in \mathbb{R}\}$ とする．まず $\gamma(t)$ が平衡点 x_0 であるときには形式的な積分 $\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ を

$$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0} := \int_{-\infty}^{\infty} dF(X^1)(\gamma^{\mathrm{h}}(t))dt.$$

と定め，$\gamma(t)$ が平衡点でないときには，点 $x_0 \in \Gamma$ における周期軌道 $\gamma(t)$ に対するポアンカレ断面 Σ を固定し，形式的な積分 $\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ を

$$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0} := \lim_{k,l\to+\infty} \int_{T_{-k}^{x_0}}^{T_l^{x_0}} dF(X^1)(\gamma^{\mathrm{h}}(t))dt. \tag{7}$$

と定める．ただし，$\{T_i^{x_0}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ は，$\gamma^{\mathrm{h}}(t)$ が断面 Σ を交差する時刻列を表し，$T_i^{x_0} \to \pm\infty (i \to \pm\infty)$ である．

定理 6. 条件 (A1)' と (A2) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において第一積分 $F_\varepsilon = F + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ は 0 に収束する．

定理 7. 条件 (A1)' と (A2) を仮定し，さらに X_ε が周期軌道 γ_ε で $\gamma_0 = \gamma$ を満たすものを持つと仮定する．このとき，X_ε が周期軌道 γ_ε に対するホモクリニック軌道 $\gamma_\varepsilon^{\mathrm{h}}$ で $\gamma_0^{\mathrm{h}} = \gamma^{\mathrm{h}}$ を満たすものをもつならば，$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ は 0 に収束する．

4 メルニコフの方法との関係

再び，式 (1) を考える．条件 (M) の下で，$lT^\alpha = mT$ ($l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素) ならば，$\varepsilon = 0$ のとき，任意の $\tau \in [0, T]$ に対して，$\hat{\gamma}_\tau^{m/l}(t) = (q^\alpha(t), t + \tau)$ は mT-周期軌道となる．定理 3 における積分 (6) は

$$\mathscr{I}_{H,\hat{\gamma}_\tau^{m/l}} = \int_0^{mT} DH(q^\alpha(t)) \cdot g(q^\alpha(t), t + \tau)dt$$

となり，式 (3) で定義された，周期軌道に対するメルニコフ関数 $M^{m/\ell}(\tau)$ に一致する．定理 3 より次を得る．

定理 8. 条件 (M) を仮定する．式 (1) が第一積分 $H_\varepsilon = H + O(\varepsilon)$ をもつならば，$M^{m/\ell}(\tau)$ は恒等的に零である．

また，条件 (M') の下で，$\varepsilon = 0$ のとき，任意の $\tau \in [0, T]$ に対して，$\hat{\gamma}_\tau(t) = (q^0(t), t+\tau)$ は周期軌道 $(x, \theta) = (p, t+\tau)$ に対するホモクリニック軌道となる．定理 6 における積分 (7) は

$$\mathscr{I}_{H,\hat{\gamma}_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} D_x H(q^0(t)) \cdot g(q^0(t), t+\tau) dt$$

となり，式 (2) で定義された，ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数 $M(\tau)$ に一致する．よって，定理 8 と同様に次が成り立つ．

定理 9. 条件 (M)' を仮定する．式 (1) が第一積分 $H_\varepsilon = H + O(\varepsilon)$ をもつならば，$M(\tau)$ は恒等的に零である．

参考文献

[1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[2] M. Ayoul and N.T. Zung, Galoisian Obstructions to Non-Hamiltonian Integrability, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2010, vol. 348, nos. 23-24, 1323–1326.

[3] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 196 (1998), 19–51.

[4] J. Guckenheimer and P.J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.

[5] J.J. Morales-Ruiz, A note on a connection between the Poincaré-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiot theory, *in Differential Galois theory, T. Crespo and Z. Hajto (eds.), Banach Center Publ. 58, Polish Acad. Sci. Inst. Math.*, 2002, pp. 165–175.

[6] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods, Appl. Anal.*, 8 (2001), 33–96.

[7] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).

[8] K. Yagasaki, The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, 56 (1996), no. 6, 1720–1765.