

2 自由度ハミルトン系における横断的なヘテロクリニック軌道の存在と非可積分性

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
山中祥五 (Shogo YAMANAKA)

概要

本講演では、不変平面上にサドル・センターを連結するヘテロクリニックをもつ 2 自由度ハミルトン系を取りあげる。メルニコフ型の手法を用い、平衡点の近傍にある周期軌道に対する横断的なヘテロクリニック軌道の存在条件を求め、Morales-Ramis 理論による非可積分であるための条件との関係性を明らかにする。さらに、具体的な適用例を示し、得られた結果の有用性を確認する。

1 導入

微分方程式の可積分性を調べる問題は古くから重要な問題であったが、特定の微分方程式の非可積分性は Ziglin の定理 [11] や Morales-Ramis 理論 [6] によって調べる事が可能になった。これらの手法により、エノン・ハイレス系や剛体の運動など多くの力学系に対して可積分性を決定する問題が解かれた。一方で、非可積分であることと力学系的な性質の関係は明らかではない。特に、カオス的な系が非可積分であることから、非可積分性を示すことで力学系の解の複雑であることが明らかになると期待されるが、限られた場合を除いてそのことは数学的に示されていない。

本講演では、非可積分であるための十分条件が成り立てば、ある意味で解が複雑であることが明らかにする。2 節では可積分性に関する基本事項を紹介する。3 節でヘテロクリニック軌道を持つ一般的な力学系の非可積分性の十分条件をモノドロミー行列により与える。4 節でヘテロクリニック軌道を持つハミルトン系に対しては、モノドロミー行列により与えられる非可積分性の条件と、周期軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差するための条件の関係を明らかにする。最後に 5 節で具体例を通してこれらの結果の有用性を明らかにする。

2 可積分性

古典的には可積分条件はハミルトン系に対してのみ考えられていた。ハミルトニアンを $H: \mathbb{C}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$ とする m 自由度ハミルトン系を考える。

$$\dot{z} = J_m DH(z), \quad z = (q, p) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \quad (1)$$

ここで, E_m を m 次単位行列として J はシンプレクティック行列

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$$

とする. また, 本稿では H は $\mathbb{C}^{2m}$ 上で有理型関数の場合を考える. ここで, Liouville 括弧

$$\{F, G\}(z) := \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

を用いれば, 方程式 (1) は

$$\dot{z}_i = \{z_i, H\}$$

と書くことができ, また, 関数 F が方程式 (1) の保存量であることは $\{F, H\} = 0$ と同値になる.

Definition 1 (Liouville 可積分). m 自由度ハミルトン系が **Liouville 可積分** であるとは, m 個の有理型関数 $H_1 = H, H_2, \dots, H_m$ が存在して, $DH_1(z), \dots, DH_m(z)$ がほとんど至る所一次独立であり, 任意の $i, j = 1, \dots, m$ に対して $\{H_i, H_j\} = 0$ となることをいう.

Liouville 可積分であり, さらに, $H_1, \dots, H_m$ が正則関数で $DH_1(z), \dots, DH_m(z)$ が至る所一次独立の場合には方程式 (1) はトーラス上の線形流に変換されることが分かる (Arnold-Liouville の定理). つまり, Liouville 可積分の時には力学系は非常に単純である.

一般の微分方程式に対しては, Liouville 可積分性の概念を一般化した可積分条件が Bogoyavlenski により定式化されている. 次の一般的な形の n 次元微分方程式系を考える.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{C}^n \quad (2)$$

ここで, $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は有理型関数とする.

Definition 2 (可積分 [2]). 自然数 p, q を $p \geq 1, q \geq 0, p + q = n$ となるものとする. n 次元微分方程式 (2) が (p, q) -可積分であるとは, p 個のベクトル場 $f_1 (= f), f_2, \dots, f_p$ と q 個の関数 $H_1, \dots, H_q$ が存在し, 以下が成り立つことをいう:

- (1) ベクトル場 $f_1(x), \dots, f_p(x)$ はほとんど至る所一次独立, かつ, $DH_1(x), \dots, DH_q(x)$ がほとんど至る所一次独立.
- (2) ベクトル場 $f_1, \dots, f_p$ は可換, すなわち, $[f_i, f_j](x) := Df_j(x)f_i(x) - Df_i(x)f_j(x) = 0$ ($i, j = 1, \dots, p$) が成立.
- (3) 関数 $H_1, \dots, H_q$ はベクトル場 $f_1, \dots, f_q$ の保存量, すなわち, $\mathcal{L}_{f_i}(H_j)(x) := f_i(x) \cdot DH_j(x) = 0$ ($i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$) が成立する.

方程式 (2) が **Bogoyavlenski** の意味で可積分あるいは単に可積分であるとは, ある p, q で (p, q) 可積分であることをいう.

Bogoyavlenski の意味での可積分性は様々な意味での可積分の概念を含むものになっている. 例えば, n 次元微分方程式は $n - 1$ 個の保存量を持つとき可積分であると言われるがこれは $(1, n - 1)$ -可積分に対応する. また, 方程式 (2) が線形で $\dot{x} = Ax$ と書けるとき解が $x = e^{At}$ と書けるが, このとき n 個の可換なベクトル場を持つので $(n, 0)$ -可積分に対応する. さらに, ハミルトン系 (1) が Liouville 可積分なら $f_1(z) := JDH_1(z), \dots, f_m := JDH_m(z)$ とおけば (m, m) -可積分になる.

話題を非可積分性判定に移す．ある意味での非可積分性の証明は Poincaré が行なっているが，本稿で定義した Liouville の意味での非可積分性を示すことは長らくの問題であった．Ziglin [11] 以降，Morales-Ramis 理論 [6] や Ayoul-Zung の定理 [1] によって強力な非可積分性判定の方法が確立した．微分方程式 (2) の特解を $x = \hat{x}(t)$ とする．以下の線形微分方程式を特解 $\hat{x}(t)$ 周りの (2) の変分方程式という．

$$\dot{\xi} = Df(\hat{x}(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n \quad (3)$$

線形微分方程式に対してはモノドロミー行列や微分ガロア群が定義できる．

Theorem 1. 方程式 (2) が可積分であるとき，変分方程式 (3) の微分ガロア群 G の単位成分 G^0 が可換である．

この定理の対偶をとれば， G^0 が非可換であることを示すことで (2) が非可積分であることを証明できる．ハミルトン系の Liouville 可積分性に対しては，Ziglin がモノドロミー行列，Morales-ruiz と Ramis が微分ガロア群による判定法を与えたが，Ayoul と Zung により Theorem 1 の形に一般化された．

3 モノドロミー行列による非可積分判定

本稿の目的は非可積分性と力学系の性質，特に，カオスとの関係を調べることである．前節では微分ガロア理論による非可積分判定の手法を紹介したが，力学系の性質との関係を調べるには微分ガロア群よりもモノドロミー行列を使う方が良い．ハミルトン系の場合には Ziglin によりモノドロミーによる非可積分性条件が与えられているが，本節では一般的な微分方程式に対して結果を拡張することを考える．

以下の一般的な実力学系を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

式 (4) に対して以下のことを仮定する．

- (A1) $(n - 2)$ 次元の境界付き解析的局所不変多様体 $\mathcal{N}$ でその内部 $\mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$ が二つの平衡点 $x_{\pm}$ とヘテロクリニック軌道 $\hat{x}(t)$ で $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{x}(t) = x_{\pm}$ となるものが存在するとする．
- (A2) 2 つの 1 次元の境界付き局所不変多様体 $\mathcal{C}_{\pm}$ で $x_{\pm} \in \mathcal{C}_{\pm} \setminus \partial\mathcal{C}_{\pm}$ かつ十分大きい $T > 0$ で $|t| > T$ に対して $\hat{x}(t) \in \mathcal{C}_{\pm}$ となるものが存在するとする．

仮定 (A1) において $x_+ = x_-$ かつ $\hat{x}(t)$ がホモクリニック軌道となる場合も許す．

ヤコビ行列 $Df(p_{\pm})$ に対して， $\lambda_{\pm}$ は $\mathcal{C}_{\pm}$ に接する固有ベクトルに対する固有値であり， $\mu_{\pm}, \nu_{\pm}$ は $\mathcal{N}$ に直交する固有ベクトルに対する固有値とする．以下の条件を考える．

$$(A3) \quad \lambda_{\pm} \neq 0 \text{ かつ } \frac{\mu_{\pm} - \nu_{\pm}}{\lambda_{\pm}} \notin \mathbb{Q};$$

$$(A4) \quad \frac{\mu_{\pm} + \nu_{\pm}}{\lambda_{\pm}} \in \mathbb{Z};$$

$$(A5) \quad \frac{\mu_+}{\lambda_+} - \frac{\mu_-}{\lambda_-} \in \mathbb{Z}.$$

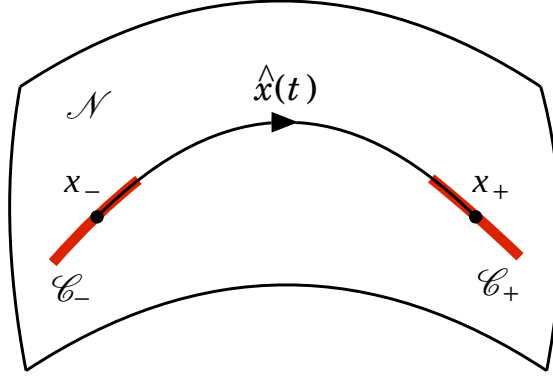


図 1: Assumptions (A1) and (A2).

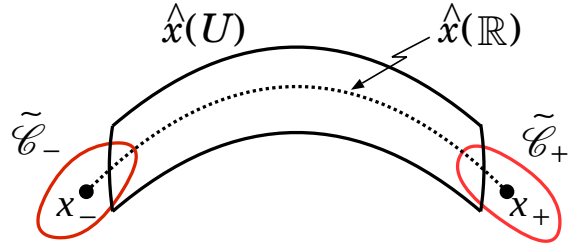


図 2: Riemann surface $\Gamma = \hat{x}(U) \cup \tilde{\mathcal{C}}_+ \cup \tilde{\mathcal{C}}_-$.

式 (4) および多様体 $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}_\pm$ を複素化する. 特に, 式 (4) は $\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された複素微分方程式系となる. ヘテロクリニック軌道 $\hat{x}(t)$ まわりの変分方程式において, 仮定 (A1) の不変多様体 $\mathcal{N}$ の直交方向を考えることで, 次の 2 次元直交変分方程式

$$\frac{d\eta}{dt} = A(t)\eta, \quad t \in \Gamma$$

が定義できる. ただし, Γ は解 $\hat{x}(t)$ の定めるリーマン面と複素化した $\mathcal{C}_\pm$ から定義されるリーマン面であり, $p_\pm$ に対応する点 $0_\pm$ のみを特異点に含むようにしたものである. ここで, 直交変分方程式は $0_\pm$ を原点とする局所座標 $s_\pm$ によって局所的に

$$\frac{d\eta}{ds_\pm} = \frac{A_\pm(s_\pm)}{\lambda_\pm s_\pm} \eta$$

と書ける. ここで, $A_\pm(s_\pm)$ は正則関数を成分にもつ 2 次正方行列である. この直交変分方程式は $0_\pm$ に確定特異点を持ち, この特異点についてのモノドロミー行列を $M_\pm$ とする. 以下の結果を得る.

Theorem 2 ([10]). (A1)-(A3) の仮定の下, 式 (5) が可積分であるならば, M_+ と M_- は同時三角化可能となる.

Theorem 3 ([10]). (A1)-(A4) の仮定の下, 式 (4) の複素化が可積分であるなば, M_+ と M_- は同時対角化可能となる. さらに, (A6) が成り立つときならば, $M_+M_- = \text{Id}_2$ または $M_+ = M_-$ となる.

証明には Theorem 1 を用いる. Theorem 2 や 3 の前半はハミルトン系の場合は Ziglin の定理の帰結である. また, ホモクリニック軌道の場合, つまり, $x_+ = x_-$ の場合は Yagasaki[9] で示されている.

4 非可積分判定と横断的ヘテロクリニック軌道の存在の関係

前節で与えたモノドロミー行列による非可積分の条件と力学系的な性質の関係を 2 自由度のハミルトン系に対して考える.

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1 D_x H(x, y), \\ \dot{y} = J_1 D_y H(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

ここで, ハミルトニアン $H: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は解析的とする. 以下を仮定する.

- (B1) x 平面 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ は不変である.
- (B2) x 平面上には 2 つのサドル・センター型の平衡点 $(x, y) = (x_{\pm}, 0)$ が存在し, $JD_x^2 H(x_{\pm}, 0)$ は 1 組の実固有値 $\lambda'_{\pm}, -\lambda'_{\pm}$ ($\lambda'_{\pm} > 0$), $JD_y^2 H(x_{\pm}, 0)$ は 1 組の純虚固有値 $i\omega_{\pm}, -i\omega_{\pm}$ ($\omega_{\pm} > 0$) を有する.
- (B3) x 平面上にサドル・センター $(x_-, 0)$ から $(x_+, 0)$ へのヘテロクリニック軌道 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ が存在する. Fig. 3 を参照せよ.

Lyapunov の中心定理 [4] により, サドル・センター $(x_{\pm}, 0)$ の近傍には, $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$ のとき $(x_{\pm}, 0)$ に漸近する, 周期軌道の 1 パラメータ族 $\gamma_{\pm}^{\alpha_{\pm}}$ ($\alpha_{\pm} \in (0, \alpha_{\pm}^0]$, $\alpha_{\pm}^0 > 0$) が存在する. Fig. 4 を参照せよ. ヘテロクリニック軌道 $(x^h(t), 0)$ 側の, $\gamma_-^{\alpha_-}$ の不安定多様体と $\gamma_+^{\alpha_+}$ の安定多様体の分枝を, それぞれ, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha_+})$ と表す. Fig. 5 を参照せよ.

$W_r^u(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha_+})$ が横断的に交差するときには, 力学系は複雑になることが期待される. 特に, $\gamma_+^{\alpha_+}$ の不安定多様体 $W^u(\gamma_+^{\alpha_+})$ と $\gamma_-^{\alpha_-}$ の安定多様体 $W^s(\gamma_-^{\alpha_-})$ も横断的に交差するとき, すなわ

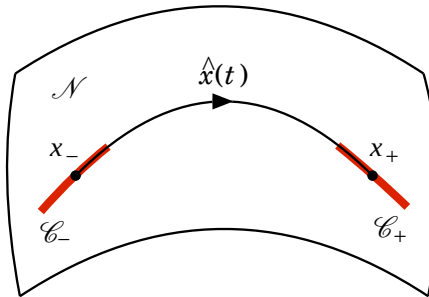


図 3: 仮定 (A2) と (A3)

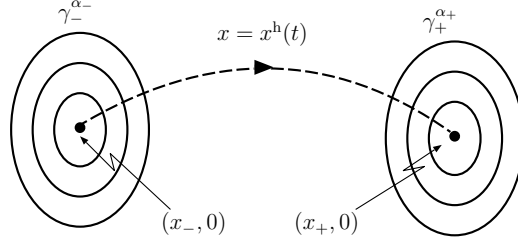


図 4: Lyapunov の中心定理により存在が保証される周期軌道の族

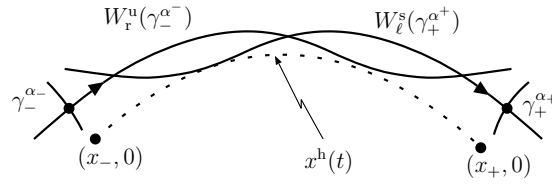


図 5: $\gamma_-^{\alpha-}$ の不安定多様体の分枝 $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $\gamma_+^{\alpha+}$ の安定多様体の分枝 $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$

ち、 $\gamma_-^{\alpha-}$ と $\gamma_+^{\alpha+}$ の横断的なヘテロクリニック・サイクルが存在するとき、 $\gamma_-^{\alpha-}$ および $\gamma_+^{\alpha+}$ の横断的なホモクリニック軌道が存在し、ハミルトン系 (5) は Poincaré 写像がその上で馬蹄写像と位相共役となる不変集合を有し、非可積分となる [3, 7]. 解が $x^h(t)$ がホモクリニック軌道の場合にもこのような状況になる.

$W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ の横断的な交差の存在を示すことができる Melnikov 型手法に関する文献 [8] の概要を述べる. ヘテロクリニック軌道 $(x, y) = (x^h(t), 0)$ 周りの直交変分方程式

$$\dot{\eta} = J_1 D_y^2 H(x^h(t), 0) \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \quad (6)$$

とサドル・センター $(x_\pm, 0)$ 周りの直交変分方程式

$$\dot{\eta} = J_1 D_y^2 H(x_\pm, 0) \eta \quad (7)$$

の基本行列を、それぞれ、 $\Psi(t)$ と $\Phi_\pm(t)$ とおく. 式 (7) は $q_\pm(\eta) = \frac{1}{2} \eta^T D_y^2 H(x_\pm, 0) \eta$ をハミルトニアンとする線形ハミルトン系である. ここで、 T は転置演算を表す. このとき、極限

$$B_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_\pm(-t) \Psi(t)$$

が存在し、 $B_0 = B_+ B_-^{-1}$ とおく. 非零のベクトル $\eta_0 \in \mathbb{R}^2$ に固定して、Melnikov 関数を次式で定義する.

$$M(t_0) = q_-(\eta_0) - q_+(B_0 \Phi_-(t_0) \eta_0)$$

直感的にメルニコフ関数は $M(t_0)$ は $x^h(t_0)$ 付近での $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ の距離を表す関数である. よって、 $M(t_0)$ が零点を持てばそこで交差が起こり、零点を持たなければ交差が起こらないことが期待される. 実際以下が示された.

Theorem 4 ([8]). $M(t_0)$ が単純零点をもつならば, $H(\gamma_-^{\alpha-}) = H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たす十分小さい $\alpha_{\pm} > 0$ に対して, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する.

一方, 仮定 (B1)-(B3) の仮定の下で Theorem 2,3 を用いると, 以下が分かる.

Corollary 1 ([10]). ハミルトン系 (5) が有理型的に可積分と仮定する. このとき, M_+ と M_- は可換である. さらに, $\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ ならば, $M_+ = M_-^{-1}$ または $M_+ = M_-$ である.

以上により, 既存の結果から非可積分性に関する条件 Corollary 1 と安定多様体と不安定多様体の横断的交差の条件 theorem 4 が得られた. これらの条件の関係を調べることで, 非可積分性と力学系的な性質の関係を理解することができる.

主結果を述べるために細かい仮定をおく. $D_y^2 H(x_{\pm}, 0)$ の固有値を $\sigma_1^{\pm}, \sigma_2^{\pm}$ とおく. $\sigma_1^{\pm} \sigma_2^{\pm} = \omega_{\pm}^2$ であるから $\sigma_1^{\pm}$ と $\sigma_2^{\pm}$ は同符号となる. σ_1^+ が σ_1^- が異符号のとき, 十分小さい $\alpha_{\pm} > 0$ に対して $H(\gamma_-^{\alpha-}) \neq H(\gamma_+^{\alpha+})$ となることが示され, 安定多様体と不安定多様体の交差は起こらない. よって, σ_1^+ が σ_1^- が同符号の場合のみが問題となり, 以下ではこれを仮定する.

Corollary 1 と theorem 4 といくつかの計算により以下を得ることができた.

Theorem 5. $\alpha_{\pm} > 0$ は $H(\gamma_-^{\alpha-}) = H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たし, 十分小さいものとする.

- (i) $\omega_+ = \omega_-$ かつ M_+ と M_- が非可換ならば, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する.
- (ii) $\omega_+ \neq \omega_-$ ならば, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差するか, 2 次的に接するか, 交わらないかのいずれかである.

Theorem 6. 定理 2 の条件に加えて, $\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ と仮定する.

- (i) $\omega_+ = \omega_-$ かつ $M_+ \neq M_-^{-1}$ が非可換ならば, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する.
- (ii) $\omega_+ \neq \omega_-$ かつ $M_+ = M_-^{-1}$ ならば, $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ は交わらない.

Theorem 5, 6 の (i) は, $(x^h(t), 0)$ がホモクリニック軌道となる $x_+ = x_-$ の場合に対する文献 [5, 9] の結果の一般化である.

状況は $\omega_+ = \omega_-$ の場合と $\omega_+ \neq \omega_-$ の場合で大きく異なる. $\omega_+ = \omega_-$ の場合, 非可積分の条件が横断的な交差の条件を導く. 一方, 一般に $\omega_+ \neq \omega_-$ の場合には, 非可積分の条件と横断的な交差の条件には関係がない. ただし, $\omega_+ \neq \omega_-$ に加えて $\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ ならば, 非可積分だと判定できない場合に交差が起こらないということが分かり, 二つの条件には関係があることが分かった.

5 具体例

5.1 STF 流れの非可積分性

以下の微分方程式系を考える.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z - 8xy \\ 11x^2 + 3y^2 + z^2 + \beta xz - 3 \\ -\alpha x + 2yz - \beta xy \end{pmatrix} \quad (8)$$

式 (8) はある定常ストークス流れを表し, STF 流れと呼ばれている. Theorem 3 を適用すると,

$$\frac{\sqrt{25 - \alpha(\alpha \pm \beta)}}{3} \notin \mathbb{Q} \quad \text{かつ} \quad \frac{\sqrt{25 - \alpha(\alpha + \beta)} - \sqrt{25 - \alpha(\alpha - \beta)}}{6} \in \mathbb{Z}$$

のとき, 式 (8) は非可積分となることが分かる.

5.2 4 次のポテンシャルを持つハミルトン系

ハミルトン関数を

$$H = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + \omega^2 y_1^2) - \frac{1}{4}(x_1^4 + y_1^4) - \frac{1}{2}\beta_1 x_1 y_1^2 - \frac{1}{2}\beta_2 x_1^2 y_1^2$$

とする, 次の 2 自由度ハミルトン系を考える:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^3 + \frac{1}{2}\beta_1 y_1^2 + \beta_2 x_1 y_1^2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 + \beta_1 x_1 y_1 + \beta_2 x_1^2 y_1 - y_1^3 \end{aligned} \tag{9}$$

x 平面は不変平面であり, $(x, y) = (\pm 1, 0, 0, 0)$ は平衡点である. $\omega^2 - \beta_2 > |\beta_1|$ のとき, それらはサドルセンターとなり, 仮定 (B1)-(B3) が満たされる. 特に, 一組のヘテロクリニック軌道

$$x_{\pm}^h(t) = \left(\tanh\left(\pm \frac{t}{\sqrt{2}}\right), \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2\left(\pm \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

が存在する. また, $\omega_+ = \omega_-$ となるのは $\beta_1 = 0$ のときである.

直交変分方程式のモノドロミー行列を計算することにより以下を得る.

Lemma 1. $\omega^2 - \beta_2 > |\beta_1|$ とする. M_+ と M_- が可換であれば, $\beta_1 = 0$ かつ $\beta_2 = \frac{1}{2}n(n-1), n \in \mathbb{Z}$ であり, $M_+ = M_-^{-1}$ となる.

よって, Theorem 5 より次の結果を得る.

Theorem 7. $\omega^2 - \beta_2 > |\beta_1|$ とする. $\beta_1 \neq 0$ または $\beta_2 \neq \frac{1}{2}n(n-1), n \in \mathbb{Z}$ ならば, ハミルトン系 (9) は有理型的に非可積分である. さらに, $\beta_1 = 0$ かつ $\beta_2 \neq \frac{1}{2}n(n-1), n \in \mathbb{Z}$ ならば, $H = H(\gamma_-^{\alpha-}) = H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たす十分小さい $\alpha_{\pm} > 0$ に対して, 不安定多様体と安定多様体の分枝 $W_r^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ および $W_\ell^u(\gamma_+^{\alpha+})$ と $W_r^s(\gamma_-^{\alpha-})$ は横断的に交差する.

参考文献

- [1] M. Ayoul and N.T. Zung, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **348** (2010), 1323–1326.
- [2] O.I. Bogoyavlenski, Comm. Math. Phys., **196** (1998), 19–51.
- [3] J. Guckenheimer and P.J. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983.

- [4] K.R. Meyer, G.R. Hall and D. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -Body Problem, Springer, New York, 2009.
- [5] J.J. Morales-Ruiz and J. M. Peris, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **8** (1999) 125–141.
- [6] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Methods, Appl. Anal., **8** (2001), 33–96.
- [7] J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
- [8] T. Sakajo and K. Yagasaki, J. Nonlinear Sci., **18** (2008), 485–525.
- [9] K. Yagasaki, Nonlinearity, **16** (2003), 2003–2012.
- [10] K. Yagasaki and S. Yamanaka, J. Differential Equations, **263** (2017) 1009–1027.
- [11] S. L. Ziglin, Funct. Anal. Appl. **16** (1983) 8–23.