

# 変分法を用いた $n$ 体問題の周期解の存在証明

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻  
梶原唯加 (Yuika Kajihara)

## 0 準備

(本題に入る前の準備として、オイラー・ラグランジュ方程式ってなんだっけ？という人のために解析力学について少し補足をします。解析力学についてある程度学んだことがある人にとっては初步的な既知な事実ばかりだと思うので読み飛ばしてもらって構いません。)

まず、力学の問題を考える。高校の物理でよく見かけた、万有引力の法則を用いた標準的な問題というのは、一般に次のような形をした微分方程式であった：

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d)$$

これに対して、ラグランジアン  $L$  を次で定義する：

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(\mathbf{q})$$

このとき、次式をオイラー・ラグランジュ方程式と呼ぶ：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

簡単な計算によって

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

が成り立つことがわかる。

ラグランジアン  $L$  に対して微分の操作を施すと、運動方程式が導かれた。では次にこの  $L$  の積分を考えてみよう。積分区間を  $[a, b]$  として、作用積分  $\mathcal{A}$  を次で定義する：

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) := \int_a^b L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

ここで、次のような記号を定義する。

$$\Omega(A, B) := \{\mathbf{l}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{l}(a) \in A, \mathbf{l}(b) \in B\}$$

一般に  $\mathbf{q}(a), \mathbf{q}(b)$  に対して課す制約条件を境界条件と呼ぶ。例えば、「 $\mathbf{q}(a)$  が  $x$  軸上にあり、 $\mathbf{q}(b)$  が  $y$  軸上にある。」という境界条件を課すとすると、 $A$  を  $x$  軸の集合、 $B$  を  $y$  軸上の点の集合として、関数  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{q} \in \Omega(A, B)$  の中を動くものとみなせる。

変分法と聞くと、ある点から点の最短路を与えるもの、と想像するかもしれないが、後述の  $n$  体問題の周期解の存在証明を行う場合は、こうしたある集合を境界条件に用いることが多い。

汎関数  $\mathcal{A}$  に対して「微分」を次で定義しよう.

$$\mathcal{A}'(\mathbf{q})\boldsymbol{\delta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}) - \mathcal{A}(\mathbf{q})}{h}$$

$\mathcal{A}$  の変数である  $\mathbf{q}$  という関数を  $\boldsymbol{\delta}$  方向に微小にずらしたとき, どのような値をとるかを見る. ただし,  $\boldsymbol{\delta}$  は境界条件において 0 を取るような関数とする. つまり,  $\boldsymbol{\delta} \in \Omega(\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\})$  である. 「微分」が有限次元の微小な変化をみていたのに対して. このような関数(無限次元)の微小な変化を「変分」と呼ぶ.

**Remark 1.** ここでは, 汎関数の変数である関数がどのような関数であるか(連続だとか, 微分可能性だとか)については深く言及しないことにする. 厳密に汎関数の微分を定義する際はそれではうまくいかない. というのも, 滑らかな関数を徐々に尖らせて, 極限ではある点で微分が不可能になるような関数列が作れる. だから汎関数の極限操作は, 当然ではあるが, 有限次元と同じようにはいかない.

任意の  $\boldsymbol{\delta}$  に対して  $\mathcal{A}'(\mathbf{q})\boldsymbol{\delta} = 0$  となるとき,

$$\mathcal{A}'(\mathbf{q}) = 0$$

と表し. このような  $\mathbf{q}$  を  $\mathcal{A}$  の臨界点と呼ぶ. 臨界点  $\mathbf{q}$  は実はオイラー・ラグランジュ方程式の解になっている, より正確には次の定理が成り立つ.

**定理 0.1.**  $\mathbf{q} \in \Omega(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  について, 次のふたつの条件は同値.

1.  $\mathbf{q}$  がオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

を満たす.

2.  $\mathbf{q}$  が  $\mathcal{A}$  の臨界点, つまり,  $\mathcal{A}'(\mathbf{q}) = 0$  が成り立つ.

*Proof.*  $\boldsymbol{\delta} \in \Omega(0, 0)$  とする.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}) \Big|_{h=0} &= \int_0^1 \frac{d}{dh} L(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}, \dot{\mathbf{q}} + h\dot{\boldsymbol{\delta}}) dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d}{dh} (\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}, \dot{\mathbf{q}} + h\dot{\boldsymbol{\delta}}) + \frac{d}{dh} (\dot{\mathbf{q}} + h\dot{\boldsymbol{\delta}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q} + h\boldsymbol{\delta}, \dot{\mathbf{q}} + h\dot{\boldsymbol{\delta}}) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt \\ &= \left[ \boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]_0^1 + \int_0^1 \boldsymbol{\delta} \cdot \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{\delta} \cdot \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt \end{aligned}$$

これより, 1  $\Rightarrow$  2 が成り立つ. 2  $\Rightarrow$  1 は, 自明ではないが, 背理法を用いると比較的容易に導くことができる. ここでは省略する.  $\square$

ここまでまとめ.

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \int_0^1 L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}(t)|^2 - V(\mathbf{q}(t)) \right) dt$$

とすると, 以下の 3 つが同値であることがわかった.

- $\mathbf{q}(t)$  が Newton の運動方程式を満たす.
- $\mathbf{q}(t)$  が Euler-Lagrange 方程式を満たす.
- $\mathbf{q}(t)$  の Lagrangean  $\mathcal{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  が極値をとる.

この章で扱った内容に関しては, [6] が初学者にもわかりやすく, 説明が丁寧.

## 1 $n$ 体問題

- $n$  個の物体を用意する.
- $i$  番目の物体の位置  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$ , 質量  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

このとき, 次式で表される常微分方程式を  $n$  体問題という. (ただし重力定数  $G$  は 1 とする.)

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

対応するラグランジアンは

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}$$

である.

### 1.1 $n$ 体問題の例

**例 1.1** (ケプラー問題). 次のケプラー問題は質量  $k$  の物体が原点で固定されている 2 体問題の一つとみなせる.

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -\frac{k}{|\mathbf{q}|^3} \mathbf{q} \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3)$$

ケプラー問題は解ける.

**例 1.2** (2 体問題). 一般的な 2 体問題を考えてみよう.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{m_2}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= -\frac{m_1}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \end{aligned}$$

$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  について

$$\mathbf{Q}_1 = m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$$

と変換してみよう. すると元の方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_1 &= m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = 0 \\ \ddot{\mathbf{Q}}_2 &= \ddot{\mathbf{q}}_2 - \ddot{\mathbf{q}}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{Q}_2|^3} \mathbf{Q}_2 \end{aligned}$$

となって, ケプラー問題に帰着できる. したがって, 2 体問題も一般に解析的に解を求めることができる.

**例 1.3.** 3 体問題において  $m_3$  の質量が他の  $m_1, m_2$  に対して十分小さく、その影響を無視できる場合（つまり  $0 < m_3 \ll m_2 \ll m_1$  の場合）を考えてみよう。 $m_3 \approx 0$  と仮定して、 $\ddot{\mathbf{q}}_1$  と  $\ddot{\mathbf{q}}_2$  の  $m_3$  についての項を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{m_2}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= -\frac{m_1}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 &= -\frac{m_1}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) - \frac{m_2}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2|^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2)\end{aligned}$$

これを制限 3 体問題という。この問題は非可積分であり、解析的には解けないことが知られている。また太陽と木星間に存在する小惑星の運動の解析、ロケットの軌道設計モデルとしても実際に用いられる数理モデルでもある。

前述の 3 体問題を特殊な条件下に制限した問題ですら解けないことからも類推されるように、一般に、 $n \geq 3$  の時、 $n$  体問題は解が解析的に求められないことが知られている。一般解を求めることができないので、周期解などの特殊解の解析が新たな目標のひとつとなる。その例を見てみよう。

**例 1.4** (8 の字解, [1])。 $n$  体問題の周期解として有名なものに 3 体問題の 8 の字解がある。下図のように、3 体が互いに追跡し合いながら 8 の字を描く。*Simó* が数値計算によって見つけていた解である。2000 年に *Chenciner* と *Montgomery* が変分法を用いて厳密な存在証明に成功した。

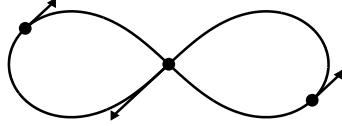


図 1 8 の字解

上図は [4] からの引用である。8 の字解は数値計算上では安定な挙動を示しているが、数学的な証明はまだなされていない。

## 1.2 制限 3 体問題

制限 3 体問題について、もう少し詳しく見てみよう。 $\mathbf{q}_1$  と  $\mathbf{q}_2$ だけ見ると、これは 2 体問題になっている。2 体問題の解として

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)^{2/3}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\mu \cos t \\ -a\mu \sin t \end{pmatrix} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^{2/3}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-\mu) \cos t \\ a(1-\mu) \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

を代入してみよう。これを特に平面円制限 3 体問題と呼ぶ。ここで、 $a = (m_1 + m_2)^{1/3}$ ,  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  である。

$$U(x, y; \mu) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x - (1 - \mu))^2 + y^2}}$$

とおくと、回転座標系でみたときの方程式は

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x + 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}$$

である。ラグランジアンは

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}; \mu) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y; \mu)$$

である。実際これは上の運動方程式に対してオイラー・ラグランジュ方程式を満たしている。

その他にも、制限 3 体問題の中には  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  と解として  $xy$  平面を動く橙円軌道をとったものを考える問題も存在する。

## 2 $n$ 体問題 + 変分法

1 章で、 $n$  体問題の解の例を見てきた。繰り返しになるが、 $n \geq 3$  の場合、 $n$  体問題は解けない。したがって、例 1.4 のような周期解（特殊解）を求める考えよう。

$\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t))$  とすると、 $n$  体問題の解は次で定義される汎関数  $\mathcal{A}$  の臨界点を求める問題に帰着できる：

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} dt$$

ここで一口に「臨界点」と言っても、微分学において、極小値、極大値、などと言った分類が存在したのと同様に、汎関数の臨界点もただひとつという訳ではない。ここでは汎関数の最小点（minimizer）の存在を示し、それが運動方程式の解のクラスに属することを示すことで  $n$  体問題の特殊解の存在証明を行うことを目標にする。それができれば、汎関数の最小点は元の  $n$  体問題に対して、与えられた境界条件を満たす解であることがわかる。

つまり、ここで扱う問題のゴールは次のようになる。

研究のゴール

汎関数の minimizer が存在し、かつ適切な解のクラスに含まれることを証明し、その解から周期解を構成する。

### 2.1 ケプラー問題 + 変分法

まず、歴史的な経緯の紹介も兼ねて、変分問題の最小点と  $n$  体問題の解を結びつけた最初の論文と思われる、Gordon の結果を紹介しよう。1977 年、Gordon は原点を周る関数のクラスにおいて、ケプラー問題の解が次式で定義される汎関数

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{1}{\mathbf{q}} \right) dt$$

の minimizer になっていることを証明した ([2]). より一般的にケプラー問題の解は具体的に計算することができ、下から評価できる.

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \left( \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{r}{\mathbf{q}} \right) dt \geq \frac{3}{2} \pi^{2/3} \mu^{1/3} \alpha^{1/3} T^{1/3}$$

計算は少々煩雑なので、ここでは省略する。

ケプラー問題において、注目すべき一つの点として、minimizer を与えるものの中には橙円軌道の解だけでなく、直線ケプラー問題と呼ばれる、原点に衝突するような解も含まれることがあげられる。変分問題において、minimizer の存在が示せても、それが衝突を持たない解であることを示さなければならない。

## 2.2 $n$ 体問題 + 変分法

前節でケプラー問題の最小点には衝突解が含まれることを述べた。実は特定の条件下で最小点の存在を保証する定理はあるのだが、それは  $n$  体問題においては衝突も含む関数のクラスのもとでの最小点である。

さて、こうした事実を踏まえた上で、変分法を用いて  $n$  体問題の解の存在を示す大まかな流れを見ていこう。主な行程は次の 4 ステップからなる。

1.  $n$  体問題を変分問題として定式化する。
2. 最小点が存在することを示す。
3. 最小点が自明解（自己相似解）でないことを示す。
4. 最小点が衝突解でないことを示す。

各ステップについて、少しコメントしておこう。

本問題において最も重要なのは 1 である。1 の段階で適切な境界条件を選ばなければ、周期解は得られない。1 の境界条件の設定をうまく行えば、2 の最小点の存在証明は容易になる。3 は与えた境界条件によっては自明な単純な軌道や平衡点が解のクラスに含まれてしまっている場合がある。それを取り除くのがステップ 3 の役割である。4 は境界条件の選定の次に困難なポイントだと思われる。ただ、経験的な勘やひらめきに頼らざるをえない部分も多い 1 と違って、4 の衝突解の除去に関してはいくつか評価法が存在する：

- 大域的評価：衝突解  $\mathbf{q}_{\text{col}}$  の作用積分の値をある値  $C$  で下から抑える。その値よりも作用積分の値が小さくなるような関数  $\mathbf{q}_{\text{test}}$ （テストパスと呼ばれる）を取って

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{col}}) > C \geq \mathcal{A}(\mathbf{q}_{\text{test}})$$

を示すことで、衝突解が最小点とは異なることを示す方法。

- 局所的評価：衝突解の衝突部分を局所的に変形させ、その変形させた軌道の方が作用積分値が小さくなることを示す方法。

こうした手法が存在するといつても、大域的評価においてはそもそもどのようにして衝突解を下から抑えるか？が難しい。局所的評価においても、どのように変形させるか？が重要であるし、考える問題設定、境界条件によって、その都度評価法を変えていかなければならない部分も多い。

こうした変分問題や衝突の評価法などについて詳しく書かれている本として、[5] をあげておく。

### 2.3 周期解の具体例

では「研究のゴール」の最後にあげた「得られた解から周期解を構成する」とはどういうことなのか、具体例を見ていこう。

例 1.4 でとりあげた 8 の字解は実は  $1/6$  周期分に相当する部分の解の存在を示し、それを滑らかにつなぎ合わせることで 8 の字解の存在を示している。実際の証明は群の作用などを用いており、ここには書ききれないでの、もう少し単純な形の解になっている平面 2 中心問題の brake 軌道の例を見てみよう。

例 2.1 (2 中心問題の brake 軌道, [3]).  $n$  体問題において、 $n - 1$  体が定ベクトルで、お互いに動かず、 $n$  体目だけが他の  $n - 1$  体から万有引力を受けて動くとき、どのようなふるまいをするのかを調べる問題を  $n$  中心問題という。平面 2 中心問題を考えよう。 $\mathbf{a} = (1, 0)$  として、次のように汎関数を定めても一般性を失わない。

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{a}|} + \frac{m}{|\mathbf{q} + \mathbf{a}|} dt$$

境界条件を次のように定めよう：

$$\mathbf{q}(0) \in A := \{(x, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}, \mathbf{q}(T) \in \mathbb{R}^2$$

このとき、既存の定理から、得られる最小点が平衡点でも衝突解でもなければ、図 2 のような、 $x$  軸に直行し、かつ、平面上のどこかで速度が 0 になって止まる (brake がかかる) 軌道が最小点に対応することがわかる。このような、特定の時刻に速度が 0 になる軌道を brake 軌道と呼ぶ。

得られた軌道を  $x$  軸に関して折り返した軌道もまた解であり、これらは滑らかに繋げることができる。このようにして図 3 のような  $4T$ -周期の軌道が得られる。

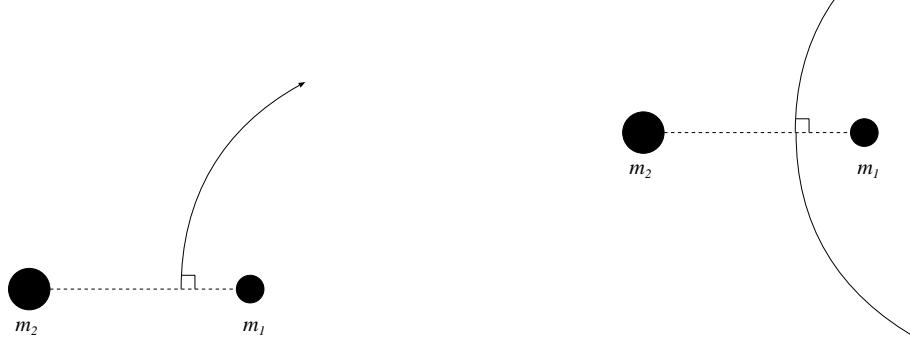


図 2  $\mathcal{A}$  の最小点

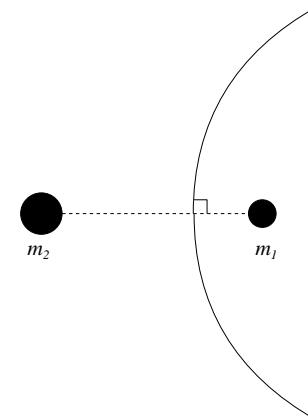


図 3 得られる  $4T$ -周期の brake 軌道

### 3 最後に

最後まで目を通していただき、ありがとうございます。恐縮ながら、例 2.1 は私の学部生時代の卒論の結果です。arxiv に載せたかったのですが、載せ方がよくわからず、誰でも見れる状態になっておりませ

ん。すみません。もしもご興味を持って、詳細を知りたいという方がいらっしゃったら、お手数ですが、[cajihara@amp.i.kyoto-u.ac.jp](mailto:cajihara@amp.i.kyoto-u.ac.jp)までご連絡ください。それと、ご質問、ご指摘等ありましたら、そちらも遠慮なくご連絡ください。

## 参考文献

- [1] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.*, **152** (2000), 881–901.
- [2] W. B. Gordon, A minimizing property of Keplerian orbits, *Amer. J. Math.*, **99** (1977), 961–971.
- [3] Y. Kajihara and M. Shibayama, Variational proof of the existence of brake orbits in the planar 2-center problem, submitted.
- [4] 柴山允瑠, 重点解説 ハミルトン力学系, サイエンス社, 2016.
- [5] 田中和永, 変分問題入門, 岩波書店, 2008.
- [6] 深谷賢治, 解析力学と微分形式, 岩波書店, 2004.