

漸近的に特異な磁場を含む系の物理量の Magnetic Weyl 量子化

奥村聡 (Okumura Satoshi)

北海道大学大学院理学院数学専攻 修士課程 2 年

1 磁場が存在する場合の量子化

外的な磁場が存在する d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) の中を運動する, 電荷 $\lambda \in \mathbb{R}$ の荷電粒子 1 個からなる古典力学系の量子化を考える. d 次の実行列全体 $M_d(\mathbb{R})$ に値をとる, $\mathbb{R}$ 上の有界な C^∞ 級関数の全体を $C_b^\infty(\mathbb{R}, M_d(\mathbb{R}))$ とし, 磁場 $B = (B_{j,k})_{j,k=1,\dots,d}$ はこの関数空間に属するとする. すなわち $B \in C_b^\infty(\mathbb{R}, M_d(\mathbb{R}))$. 磁場 B に対応するベクトルポテンシャルは

$$B_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

をみたす実ベクトル場 $A = (A_j)_{j=1}^d$ として定義される. ただし, ゲージ変換の任意性がある. ここで, $\partial_j := \partial/\partial x_j$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ である. このとき, 系の量子化は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間 $\mathcal{D}$, および $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素の集合 $\{Q_j, P_j | j = 1, \dots, d\}$ からなる三つ組 $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j | j = 1, \dots, d\})$ で次の二つの性質を持つものによって与えられる:

1. 各 $j = 1, \dots, d$ に対して, $\mathcal{D} \subset D(Q_j) \cap D(P_j^A)$ かつ $Q_j \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $P_j^A \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. ここで, Hilbert 空間上の線形作用素 A に対して, $D(A)$ は A の定義域を表す.
2. $\mathcal{D}$ 上で次の交換関係が成立する ($[A, B] := AB - BA$):

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j^A, P_k^A] = i\lambda \hbar B_{jk}, \quad [Q_j, P_k^A] = i\hbar \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, d \quad (1)$$

ただし, i は虚数単位, $\hbar = h/2\pi$ (h は Planck 定数で数学的には正のパラメータとみなし, $\hbar = \varepsilon$ と表す. また, δ_{jk} はクロネッカーのデルタである. (1) の関係式を一般化された正準交換関係という. 特に正準交換関係のことを CCR と略す. また, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の可閉線形作用素 A の閉包を $\overline{A}$ とする. この三つ組 $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \{Q_j, P_j | j = 1, \dots, d\})$ の代わりに, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と Weyl 型の交換関係

$$e^{itQ_j} e^{isP_k^A} = e^{-icts\delta_{jk}} e^{isP_k^A} e^{itQ_j}, \quad (2)$$

$$e^{itQ_j} e^{isQ_k} = e^{isQ_k} e^{itQ_j}, \quad (s, t \in \mathbb{R}, 1 \leq j, k \leq d) \quad (3)$$

$$e^{itP_j^A} e^{isP_k^A} = e^{-i\lambda \int_{[x, x+te_j+se_k]} A} e^{isP_k^A} e^{itP_j^A}, \quad (4)$$

をみたす自己共役作用素の組 $\{Q_j, P_j^A\}_{j=1}^d$ の組を考えてもよい. この組 $(\mathcal{H}, \{Q_j, P_j^A\}_{j=1}^d)$ を CCR の Weyl 型表現という. x から y に沿った 1 次微分形式 A の積分は以下のように表す:

$$\Gamma^A[x, y] := \int_{[x, y]} A$$

以下では Hilbert 空間として $L^2(\mathbb{R}^d)$ を, 稠密な部分空間として急減少関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を対応させる. 作用素 Q_j は x_j による掛け算作用素 (位置の作用素) $Q_j = \hat{x}_j$ に, 作用素 P_i^A は運動量作用素 $P_i^A = -i\hbar \partial_i - \lambda A_i(\hat{x})$

に対応させることで (1) をみたすような自己共役作用素の組を定めることができる. $\mathbb{R}^d$ の余接バンドル $T^*\mathbb{R}^d$ でシンプレクティック形式 $\sigma = \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j$ を持つものを Ξ と表す. このとき $C^\infty(\Xi, \mathbb{R})$ の元を古典物理量と呼ぶことにする. 以後用いる基本的な道具は磁氣的 Weyl 量子化である. 次に, これについて言及する.

2 磁氣的 Weyl 量子化

2.1 磁氣的 Weyl 量子化の定義

物理量 f の Weyl 量子化は 1927 年に H. Weyl によって [16] において, 形式的に

$$\mathfrak{Op}[f] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Xi} dY \mathcal{F}_\sigma[f](Y) e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P)} \quad (5)$$

として与えられた. (5) は J. J. Kohn と L. Nirenberg らによって [6] において,

$$(\mathfrak{Op}[f]u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi dy e^{i \frac{(x-y) \cdot \xi}{\varepsilon}} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)$$

として形が得られることが言及されている. この観点から, Weyl 量子化は擬微分作用素の手法を用いることができる. 磁氣的 Weyl 量子化は M. Măntoiu と R. Purice らによって, 以下の形で定義されている.

定義 1. 磁場 $B \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ とベクトルポテンシャル $A \in C_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ は $B = dA$ をみたすとし, 以後断りが無い限り, 磁場とそのベクトルポテンシャルはこの元とする. 物理量 $f \in \mathcal{S}(\Xi)$ に対して, 作用素 $\mathfrak{Op}^A: \mathcal{S}(\Xi) \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}^d))$ を

$$\mathfrak{Op}^A[f] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Xi} dY \mathcal{F}_\sigma[f](Y) e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P^A)}$$

で定める. 作用素 $\mathfrak{Op}^A[f]$ を f の磁氣的 Weyl 量子化という. ここで, $\mathcal{F}_\sigma[f]$ は f のシンプレクティック Fourier 変換のことで,

$$\mathcal{F}_\sigma[f](Y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Xi} dY' e^{i\sigma(Y, Y')} f(Y')$$

である. また

$$W_{\varepsilon, \lambda}^A(Y) := e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P^A)}$$

とする. 一般化された CCR の Weyl 型表現は $(L^2(\mathbb{R}^d), \{W_{\varepsilon, \lambda}^A(Y)\}_{Y \in \Xi})$ が定めている.

2.2 磁氣的 Wigner 変換

この小節では定義 1 において量子化する対象を広いクラスに拡張する. 量子力学の文脈では状態 ψ をと物理量 $\mathfrak{Op}^A[f]$ を固定したとき ψ に関する期待値を計算することができる. よって, $\mathfrak{Op}^A$ を $\mathcal{S}(\Xi) \times \mathcal{S}(\Xi)$ 上の半双線型形式 $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^A[f], \cdot \rangle$ として考える. $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\Xi)$, $f \in \mathcal{S}(\Xi)$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathfrak{Op}^A[f] \psi \rangle &= \int_{\Xi} dY \mathcal{F}_\sigma[f](Y) \langle \varphi, W_{\varepsilon, \lambda}^A(Y) \psi \rangle \\ &= \int_{\Xi} dX f(X) \mathcal{F}_\sigma[\langle \varphi, W_{\varepsilon, \lambda}^A(\cdot) \psi \rangle](-X) \end{aligned} \quad (6)$$

を得る.

定義 2. 作用素 $\mathcal{W}_{\varepsilon,\lambda}^A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\Xi)$ を

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,\lambda}^A(\psi, \varphi)(x, \xi) := \mathcal{F}_\sigma[\langle \varphi, W_{\varepsilon,\lambda}^A(\cdot) \psi \rangle](-X), \quad (\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \quad (7)$$

で定める。これを磁氣的 Wigner 変換と呼ぶ。

磁氣的 Wigner 変換を定義通りに計算すると、

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,\lambda}^A(\psi, \varphi)(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} dy e^{-iy \cdot \xi} e^{-i\lambda \Gamma^A[x - \varepsilon \frac{y}{2}, x + \varepsilon \frac{y}{2}]} \overline{\varphi\left(x - \varepsilon \frac{y}{2}\right)} \psi\left(x + \varepsilon \frac{y}{2}\right)$$

を得る。これはヤコビ行列の値が 1 になるような変数変換をした急減少関数 φ, ψ を変数 ξ に関して部分 Fourier 変換したものである。よって $\mathcal{W}_{\varepsilon,\lambda}^A(\psi, \varphi) \in \mathcal{S}(\Xi)$ である。この議論から、(6) は $f \in \mathcal{S}'(\Xi)$ に対しても意味を持つ。

注 3. (6) は古典物理量 f に $\mathcal{W}_{\varepsilon,\lambda}^A(\psi, \varphi)$ の重みをつけて積分をすると、量子力学的な物理量の行列要素や期待値が出ることを意味する。Wigner 変換は物理的には密度行列と関連が深い。これに関する解説は [4],[7] が詳しい。

(6) を再び変形すると、

$$\langle \varphi, \mathfrak{Op}^A[f] \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}_x^d} dx \overline{\varphi(x)} \times \left\{ \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{R}_\xi^d} \int_{\mathbb{R}_y^d} d\xi dy e^{i\frac{(x-y)}{\varepsilon} \cdot \xi} e^{-i\lambda \Gamma^A[x, y]} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \psi(y) \right\} \quad (8)$$

を得る。これはシンボルが f の Weyl 型擬微分作用素に磁場の効果の項として

$$e^{-i\lambda \Gamma^A[x, y]}$$

を取り入れたものと解釈できる。擬微分作用素の技術を使うために擬微分作用素で扱う関数のクラスを導入する。

定義 4. $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1, \delta < 1$ とする。 C^∞ 級関数 $f : \Xi \rightarrow \mathbb{C}$ で任意のマルチインデックス $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ に対して、

$$\sup_{(x, \xi) \in \Xi} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta f(x, \xi) \right| \leq C \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

をみたす $C > 0$ が存在する関数の族を Hörmander クラスシンボルと呼び、 $S_{\rho, \delta}^m(\Xi)$ と表す。 $S_{\rho, \delta}^m(\Xi)$ は可算セミノルム系を

$$|f|_{S_{\rho, \delta}^m, N} := \max_{|\alpha| + |\beta| \leq N} \sup_{(x, \xi) \in \Xi} \langle \xi \rangle^{-m + \rho|\alpha| - \delta|\beta|} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta f(x, \xi) \right|.$$

として持つ。以降では $S_{\rho, 0}^m(\Xi)$ を用いる。

3 積公式, 漸近展開公式, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性

擬微分作用素として $\mathfrak{Op}^A[f]$ を扱うにあたり、自然な興味として以下の事柄がある。

- シンボルを $f \in S_{\rho, 0}^{m_1}(\Xi), g \in S_{\rho, 0}^{m_2}(\Xi)$ としたとき、積 $\mathfrak{Op}^A[f] \mathfrak{Op}^A[g]$ は再び擬微分作用素になるか。
- 上で構成した積はシンボル同士の積 fg を主要項に持つような漸近展開の形で表すことができるか。

- $\mathfrak{Op}^A[f]$ が $B(L^2(\mathbb{R}^d))$ の元となる f の条件は何か.

これらの疑問は以下の形で解決されている.

定理 5 (Iftimie-Măntoiu-Purice[15]). $f \in S_{\rho,0}^{m_1}(\Xi), g \in S_{\rho,0}^{m_2}(\Xi)$ に対して磁氣的 Weyl product $f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g$ を, 変数 Y, Z の振動積分として,

$$\begin{aligned} f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g(X) &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \text{Os-} \int_{\Xi} \int_{\Xi} e^{\sigma(X,Y+Z)} e^{i\frac{\varepsilon}{2}\sigma(Y,Z)} \times \\ &\quad \times e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\Gamma^B[(x-\varepsilon(\frac{y+z}{2}), x+\varepsilon(\frac{y-z}{2}), x+\varepsilon(\frac{y+z}{2}))]} \\ &\quad \times \mathcal{F}_{\sigma}[f](Y) \mathcal{F}_{\sigma}[g](Z) dY dZ \\ &= \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{2d}} \text{Os-} \int_{\Xi} \int_{\Xi} e^{-i\frac{2}{\varepsilon}\sigma(\tilde{Y}-X, \tilde{Z}-X)} \times \\ &\quad \times e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\Gamma^B[(x-\tilde{y}+\tilde{z}, -x+\tilde{y}+\tilde{z}, x+\tilde{y}+\tilde{z})]} f(\tilde{Y}) g(\tilde{Z}) d\tilde{Y} d\tilde{Z} \end{aligned}$$

で定める. このとき, $f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g \in S_{\rho,0}^{m_1+m_2}(\Xi)$ と

$$\mathfrak{Op}_{\varepsilon,\lambda}^A[f] \mathfrak{Op}_{\varepsilon,\lambda}^A[g] = \mathfrak{Op}_{\varepsilon,\lambda}^A[f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g]$$

をみたす.

定理 6 (Lein[10], Lein[11]). $\varepsilon \ll 1, \lambda \ll 1$ とする. このとき $\epsilon \ll 1$ に対して, 臨界指数 n_c, k_c を

$$\varepsilon^{n_c+1} \ll \epsilon \leq \varepsilon^{n_c}, \quad \lambda^{k_c+1} \ll \epsilon \leq \lambda^{k_c}$$

をみたすものとする. に対して $N := \max\{n_c, k_c\}$ とする. $f \in S_{\rho,0}^{m_1}(\Xi), g \in S_{\rho,0}^{m_2}(\Xi)$ の磁氣的 Weyl product $f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g$ は $\varepsilon \ll 1, \lambda \ll 1$ について漸近展開することができて, $N := \max\{n_c, k_c\}$ として選ぶと,

$$f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \varepsilon^n \lambda^k (f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g)_{(n,k)} + \tilde{R}_N \quad (9)$$

をみたす. ここで (n, k) 次の項 $(f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g)_{(n,k)}$ は $S_{\rho,0}^{m_1+m_2-(n+k)\rho}(\Xi)$ の元で,

$$\begin{aligned} (f \sharp_{\varepsilon,\lambda}^B g)_{(n,k)}(X) &= \sum_{k_0+\sum_{j=1}^n j k_j, \sum_{j=1}^n k_j=k} \frac{i^{k+k_0}}{k_0! k_1! \cdots k_n!} \mathcal{L}_0^{k_0}((\partial_{\eta}, \partial_y), (\partial_{\zeta}, \partial_z)) \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_j^{k_j}((x, -i\partial_{\eta}, -i\partial_{\zeta})) f(Y) g(Z) \Big|_{Y=X=Z} \end{aligned}$$

をみたす. ただし各 $\mathcal{L}_j$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(Y, Z) &:= \frac{1}{2} \sigma(Y, Z) \\ \mathcal{L}_j(x, y, z) &:= -\frac{1}{j!} \sum_{m_1, \dots, m_{j-1}=1}^d \partial_{x_{m_1}} \cdots \partial_{x_{m_{j-1}}} B_{kl}(x) y_k z_l \left(-\frac{1}{2}\right)^{j+1} \frac{1}{(j+1)^2} \times \\ &\quad \times \sum_{c=1}^j \binom{j+1}{c} ((1 - (-1)^{j+1})c - (1 - (-1)^c)(j+1)) \times \\ &\quad \times y_{m_1} \cdots y_{m_{c-1}} z_{m_c} \cdots z_{m_{j-1}} \end{aligned}$$

で与えられる. また, 剰余項 $\tilde{R}_N$ は $S_{\rho,0}^{m_1+m_2-(N+1)\rho}(\Xi)$ の元である.

注 7. 式 (9) から擬微分作用素 $\mathfrak{Op}^A[f], \mathfrak{Op}^A[g]$ の積 $\mathfrak{Op}^A[f \sharp^B g]$ の漸近展開は主要項が $\mathfrak{Op}[fg]$ で摂動パラメータを ε または λ として摂動展開したものと解釈できる.

定理 8 (Calderón-Vaillancourt 型の定理 [15]Iftimie-Măntoiu-Purice). $f \in S_{\rho,0}^0(\Xi)$, $0 \leq \rho < 1$, の磁氣的 Weyl 量子化は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界線形作用素となる. また,

$$\left\| \mathfrak{Op}^A[f] \right\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \sup_{(x,\xi) \in \Xi} \langle \xi \rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta f(x, \xi) \right| \quad (10)$$

4 Egorov 型の定理

f が古典物理量であるとき, それに対応する量子力学的な物理量 $\mathfrak{Op}^A[f]$ が磁氣的 Weyl 量子化である. ハミルトニアンを h としたとき, 古典物理系の時間発展はハミルトンベクトル場 H_h^B によって生成される 1 パラメータ変換群 κ_t^* によって生成される. 一方, 量子力学的な時間発展は h の磁氣的 Weyl 量子化 $\mathfrak{Op}^A[h]$ を用いて $\exp(i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[h])$ と表すことができる. 古典物理量として物理量を時間発展させた場合と, 量子力学的な物理量として物理量を時間発展させた場合, これらの間の関係の特徴付けるのが Egorov 型の定理である.

定理 9. Egorov 型の定理 (Lein [10] 2010.) $h \in S_{\rho,0}^2$ は実数値関数で, $\mathfrak{Op}^A[h]$ は $D^A := D(\mathfrak{Op}^A[h]) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素とし, h の生成するハミルトンベクトル場による時間発展を κ_t^* と表す. また, 実数値関数 $a \in S_{\rho,0}^0$ に対して,

$$\begin{aligned} F_{\text{cl}}(t) &:= \mathfrak{Op}^A[\kappa_t^* a] \\ F_{\text{qm}}(t) &:= e^{i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[h]} \mathfrak{Op}^A[a] e^{-i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[h]} \end{aligned}$$

このとき, $C_T > 0$ が存在して, 任意の $t \in [0, T]$ に対して,

$$\|F_{\text{cl}}(t) - F_{\text{qm}}(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \varepsilon^2 C_T \quad (11)$$

をみたす.

$F_{\text{cl}}(t) = \mathfrak{Op}^A[\kappa_t^* a]$ は $S_{\rho,0}^0$ の元の実数値関数 a をハミルトンベクトル場 κ_t^* で時間発展させたものを磁氣的 Weyl 量子化したものである. 一方, $F_{\text{qm}}(t) = e^{i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[h]} \mathfrak{Op}^A[a] e^{-i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[h]}$ は量子力学的な物理量 $\mathfrak{Op}^A[a]$ を Heisenberg 描像で時間発展させたものである. (11) はこれらの時間発展の作用素ノルムの差がプランク定数に相当するパラメータの二乗のオーダーで抑えることができることを意味する. 以上を受けて修士論文では以下の定理を示した.

定理 10. 主定理 1 : Egorov 型の定理 $a, q \in S_{0,0}^0(\Xi)$ は実数値関数とする. 量子系としての時間発展は $F(t) := \exp\left(i \frac{t}{\varepsilon} \mathfrak{Op}^A[q]\right)$ によって与えられる. このとき, b_t で任意の $t \in [0, T]$ に対して,

$$F(t)^{-1} \mathfrak{Op}^A[a] F(t) = \mathfrak{Op}^A[b_t] + O_{\|\cdot\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))}}(\varepsilon^\infty) \quad (12)$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (b_t(x, \xi) - (\kappa_t^* a)(x, \xi))| \leq C_T \varepsilon^2 \quad (13)$$

と

$$b_t(x, \xi) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} b_n(x, \xi), \quad b_n \in S_{0,0}^0(\Xi)$$

を満たすものが存在する.

定理 10 は物理量の Heisenberg 描像による時間発展 $F(t)^{-1}\mathfrak{Op}^A[a]F(t)$ に対して, これに相当する磁氣的 Weyl 量子化のシンボルが漸近級数の意味で存在し, a のハミルトンベクトル場による時間発展 κ_t^*a と b_t のシンボルの位相での差がプランク定数に相当するパラメータの二乗のオーダーで抑えることができることを意味する.

5 特異な磁場に対する磁氣的 Weyl 量子化

磁場に関する量子力学に関して興味深い現象として Aharonov-Bohm 効果がある. これは平たく言えば, 粒子的描像における量子力学的な粒子は, 磁場 B が無い領域でも磁場のベクトルポテンシャルの影響を受けて運動する現象であり半古典論の枠組みで調べることは興味深いことに思える. 数学的には CCR の Schrödinger 表現とはユニタリ同値にならない CCR の表現が現れることと関連する.

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の中に粒子的描像からみて 1 個の荷電粒子が存在する量子系を考える. ここでは, 原点にデルタ関数的に集中した特異な磁場 B を考える. このような磁場 B を実現するベクトルポテンシャル $A_0(x)$ は

$$A_0(x) = \lambda \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right) \quad (14)$$

である. $A_0(x)$ に漸近するベクトルポテンシャル $A_s(x)$ を以下のように定める.

$$A_s(x) := \lambda \left(-\frac{x_2}{|x|^2 + s^2}, \frac{x_1}{|x|^2 + s^2} \right). \quad (15)$$

このとき,

$$B_s(x) = \text{rot} A_s(x) = \frac{2s^2}{(|x|^2 + s^2)^2}. \quad (16)$$

となるので, $\lim_{s \rightarrow 0} B_s(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} = \infty$ と $x \neq 0$ に対して, $\lim_{s \rightarrow 0} B_s(x) = \frac{0}{|x|^4} = 0$ がわかる. ここでは, $\mathfrak{Op}^A[f]$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の双線形形式 $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^A[f] \cdot \rangle$ としてみて, $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^{A_0}[f] \cdot \rangle$ が $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^{A_s}[f] \cdot \rangle$ の極限として存在したことを示した.

定理 11 (主定理 2). $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^{A_0}[f] \cdot \rangle$ が $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^{A_s}[f] \cdot \rangle$ の極限として存在する.

参考文献

- [1] 新井朝雄, "ヒルベルト空間と量子力学", 改訂増補版, 共立出版, 2014.
- [2] 新井朝雄, "量子力学の数学的構造 I, II", 朝倉書店, 1999.
- [3] 新井朝雄, "量子現象の数理", 朝倉書店, 2006.
- [4] David J. Tannor 著 山下 晃一ほか訳 "入門 量子ダイナミクス (上), (下) 時間依存の量子力学を中心に" 化学同人 2011.
- [5] H. Abels, "Pseudodifferential and Singular Integral Operators, " De Gruyter, 2012.
- [6] J. J. Kohn L. Nirenberg *An algebra of pseudo - differential operators* Communications on pure and applied mathematics , vol. XVIII, 269-305.
- [7] 小出 昭一郎 "物理現象のフーリエ解析" 筑摩書房 2018.

- [8] M. Zworski, "*Semiclassical Analysis*", American Mathematical Society, 2012.
- [9] M. Măntoiu and R. Purice, *The magnetic Weyl calculus* Journal of Mathematical Physics 45, 1394 (2004)
- [10] M. Lein, "*Semiclassical Dynamics and Magnetic Weyl Calculus*" PhD thesis Technische Universität München, Germany, 2010
- [11] M. Lein, "Two-parameter Asymptotics in Magnetic Weyl Calculus", Journal of Mathematical Physics 51, p. 123519, 2010.
- [12] M.W.Wong, "*Weyl Transformations*", Springer, 1999.
- [13] D. Robert, "*de l'Approximation Semi-Classique*" Birkhäuser, 1987
- [14] 首藤啓, "古典と量子の間", 岩波書店, 1999.
- [15] V. Iftimie, M. Măntoiu and R. Purice, "*Magnetic Pseudodifferential Operators*", RIMS, Kyoto Univ, 43, 585-623, 2007.
- [16] H. Weyl. "*Quantenmechanik und Gruppentheorie*". Zeitschrift für Physik 46, 1-46, 1927.