E_0-semigroups and product systems of W^*-bimodules

澤田友佑 (Yusuke SAWADA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

量子系の時間発展を考察すると von Neumann 環上の E_0-半群の概念が自然に現れる.

von Neumann 環 M は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の単位的 $*$-部分環であり, 弱位相に関して閉じたもののことである. M 上の $*$-準同型 $\theta_t : M \to M$ $(t \geq 0)$ から成る族 $\theta = \{\theta_t\}_{t\geq 0}$ が $\theta_0 = \mathrm{id}_M, \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$ を満たしパラメータ t に関して σ-弱連続であるとき θ を M 上の E_0-半群と呼ぶ.

Arveson[1] はプロダクトシステムの概念を導入し, I-型因子環 $(= \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ の上の E_0-半群をプロダクトシステムにより分類した. $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_t\}_{t\geq 0}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{E}_t$ $(t > 0)$ から成る族とする. 各 $s, t > 0$ に対して Hilbert 空間の同型 $U_{s,t} : \mathcal{E}_s \otimes \mathcal{E}_t \cong \mathcal{E}_{s+t}$ が存在し, これらの同型が結合律を満たす, すなわち

$$U_{r,s+t}(\mathrm{id}_{\mathcal{E}_r} \otimes U_{s,t}) = U_{r+s,t}(U_{r,s} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}_t}) \qquad (r, s, t \geq 0)$$

を満たすとき, $\mathcal{E}$ を (代数的な) プロダクトシステムと呼ぶ. しばしば $\{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid x \in \mathcal{E}_t\}$ には可測構造が仮定される. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の E_0-半群 θ に対して,

$$\mathcal{E}_t^\theta = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \theta_t(a)x = xa \ (\forall a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))\}$$

によりプロダクトシステム $\mathcal{E}^\theta = \{\mathcal{E}_t^\theta\}$ が対応する. ここで, 各 $\mathcal{E}_t$ は内積 $\langle x, y\rangle = x^*y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})' = \mathbb{C}1$ により Hilbert 空間となる. θ, θ' をそれぞれ $\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 上の E_0-半群としたとき, θ と θ' がコサイクル共役であるための必要十分条件は $\mathcal{E}^\theta$ と $\mathcal{E}^{\theta'}$ が同型であることである. プロダクトシステムの理論は後に E_0-半群の分類理論や CP_0-半群の伸張理論に大きな影響を与えた. Bhat-Skeide[2] は Hilbert 双加群から成るプロダクトシステムを用いて, C*-環上の E_0-半群に対して同様の分類を行った. この理論はさらに一般化され, Hilbert(von Neumann) 加群 E 上の共役可能な右線形有界作用素全体 $\mathcal{B}^a(E)$

上の E_0-半群についての分類が成されている ([7]).

以下, von Neumann 環 M はある忠実正規状態 ϕ を持つと仮定する. ここで, 線型汎関数 $\phi : M \to \mathbb{C}$ が忠実正規状態であるとは, M の正作用素全体 M_+ 上で正値かつ単射であり, σ-弱位相に関して連続であることである. M 自身は内積

$$\langle x, y\rangle = \phi(x^* y) \qquad (x, y \in M)$$

により前 Hilbert 空間となる. この完備化を $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ と書き, $x \in M$ を $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ の元とみなしたものを $x\phi^{\frac{1}{2}}$ と書く. $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ には $a(x\phi^{\frac{1}{2}})$ $(a, x \in M)$ によって M が左から作用している. Tomita-Takesaki 理論を援用することにより, $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ は右 M-加群にもなり, $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ は W^*-M-双加群と呼ばれるものになっている. $L^2(M)$ を Haagerup の標準表現空間とすると $L^2(M) = \overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ が成り立つ. W^*-M-双加群 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ には相対テンソル積 $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ が定義される ([3]). Hilbert 空間のテンソルと異なり, すべての $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して相対テンソル $\xi \otimes^M \eta$ が定義されるわけではない. $\mathcal{H}$ の稠密部分空間 $\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi)$ を

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi(t)x\| \le C\|\phi^{\frac{1}{2}}x\| \ (\exists C \ge 0, \forall x \in M)\}$$

で定義し, その元を ϕ-有界ベクトルと呼ぶ. 相対テンソル積 $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ を $\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{K}$ を次の内積で完備化したものとして定義する.

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta'\rangle = \langle \eta, (\pi_\phi(\xi)^* \pi_\phi(\xi'))\eta'\rangle \qquad (\xi, \xi' \in \mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi),\ \eta, \eta' \in \mathcal{K}).$$

ここで, π_ϕ は ϕ-有界ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\pi_\phi(\xi) : L^2(M) \ni \phi^{\frac{1}{2}}x \mapsto \xi x \in \mathcal{H}$ と定義され, $\pi_\phi(\xi)^*\pi_\phi(\xi') : L^2(M) \to L^2(M)$ は M の元と同一視される. 通常, $\xi \otimes \eta$ を $\xi\phi^{-\frac{1}{2}}\eta$ と書き表し, $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ は自然な W^*-M-双加群の構造を持つ.

[5] において, Bhat-Skeide[2] と Muhly-Solel[4] の伸張の構成法の関係を明らかにするために W^*-双加群のプロダクトシステムを次のように導入した.

Definition 1. *M を von Neumann 環とし, $\mathcal{H}^\otimes = \{\mathcal{H}_t\}_{t\ge 0}$ を W^*-M-双加群 $\mathcal{H}_t$ $(t \ge 0)$ から成る族で $\mathcal{H}_0 = L^2(M)$ であるものとする. 任意の $s, t \ge 0$ に対して W^*-双加群の同型 $\mathcal{H}_s \otimes^M \mathcal{H}_t \cong \mathcal{H}_{s+t}$ があり, 結合律が成り立つとき, $\mathcal{H}^\otimes$ を M 上の相対プロダクトシステムと呼ぶ.*

この度は, Bhat-Skeide の分類の方法を参考にして, 相対プロダクトシステムによる von Neumann 環上の E_0-半群の分類を行った. 本講演は [6] の結果をもとにしている.

まず, 相対プロダクトシステムのユニットの概念を次のように導入する.

Definition 2. $\mathcal{H}^{\otimes} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ を M 上のプロダクトシステムとし, $\xi^{\otimes} = \{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ を ϕ-有界なベクトル $\xi(t) \in \mathcal{H}_t$ から成る族とする. 各 $s,t \geq 0$ に対して $\mathcal{H}_s \otimes^M \mathcal{H}_t$ と $\mathcal{H}_{s+t}$ を同一視したとき $\xi(s)\phi^{-\frac{1}{2}}\xi(t) = \xi(s+t)$ が成り立つとき, $\xi^{\otimes}$ を $\mathcal{H}^{\otimes}$ のユニットと呼ぶ.

これは Arveson によるユニットの定義と異なる. [5] では CP_0-半群 T(すなわち, $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ は単位的完全正写像 $T_t : M \to M$ から成る半群でパラメータに関して σ-弱連続である) から相対プロダクトシステム $\tilde{\mathcal{H}}^{\otimes}$ とそのユニット $\tilde{\xi}^{\otimes}$ を構成した. 逆に相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ が与えられたとき

$$T_t(x) = \pi_\phi(\xi(t))^* \pi_\phi(x\xi(t)) \qquad (t \geq 0,\ x \in M)$$

により M 上の CP_0-半群 T が得られる.

Theorem 3. 相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ と CP_0-半群 T はユニットを保存する同型を除いて 1 対 1 に対応する.

さて, $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ を相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組とすると, パラメータ t に関する $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ の帰納極限 $\mathcal{H}$ が右 W^*-M-加群として定義される. 組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する CP_0-半群の伸張として von Neumann 環 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_M)$ 上の E_0-半群 θ が次のように得られる. 各 $t \geq 0$ に対して $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{H}_t$ と $\mathcal{H}$ は右 W^*-M-加群として同一視され,

$$\theta_t(a) = a \otimes^M \mathrm{id}_{\mathcal{H}_t} \qquad (t \geq 0,\ a \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_M))$$

と定義する. θ を組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する E_0-半群と呼ぶ.

Definition 4. θ を *von Neumann* 環 M 上の E_0-半群とする. 族 $w = \{w_t\}_{t\geq 0} \subset M$ が次を満たすとき, w を θ の (右) コサイクルと呼ぶ.

$$w_{s+t} = \theta_t(w_s)w_t \qquad (s,t \geq 0).$$

各 w_t がユニタリであるとき, w をユニタリコサイクルと呼ぶ.

θ のコサイクルと $\mathcal{H}^{\otimes}$ のユニットが次のように対応する.

Theorem 5. θ を組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する E_0-半群とする. このとき θ の *adapted* な縮小コサイクル $w = \{w_t\}_{t\geq 0}$ と $\mathcal{H}^{\otimes}$ の縮小ユニット $\eta^{\otimes} = \{\eta(t)\}_{t\geq 0}$ は次の関係により 1 対 1 に対応する.

$$\eta(t) = \kappa_t^* w_t \kappa_0 \phi^{\frac{1}{2}},\ w_t = \pi_\phi(\kappa_t \eta(t))\pi_\phi(\kappa_0 \phi^{\frac{1}{2}})^* \qquad (t \geq 0).$$

ただし, $\kappa_t : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$ は帰納極限の標準的な埋め込みである.

逆に M 上の E_0-半群 θ が与えられたとき, 定理 3 の CP_0-半群としての対応により相対プロダクトシステム $\mathcal{H}^{\theta\otimes}$ とそのユニット $\xi^{\theta\otimes}$ が得られる. 定理 5 の系として Arveson, Bhat-Skeide の分類と同様の分類が次のように得られる.

Theorem 6. θ, θ' を *von Neumann* 環 M 上の E_0-半群とする. それぞれが対応する相対プロダクトシステム $\mathcal{H}^{\theta\otimes}$ と $\mathcal{H}^{\theta'\otimes}$ が同型であるための必要十分条件は, θ, θ' がコサイクル同値となることである, すなわち θ のある強連続なユニタリコサイクル $w = \{w_t\}_{t\geq 0}$ が存在して $\theta'(\cdot) = w_t^*\theta(\cdot)w_t$ が任意の $t \geq 0$ で成り立つことである.

References

[1] W. Arveson, Continuous analogues of Fock space, Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1989), no. 409, iv+66 pp.

[2] B. V. R. Bhat, M. Skeide, Tensor product systems of Hilbert modules and dilations of completely positive semigroups, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 3 (2000), no. 4, 519-575.

[3] A. Connes, Noncommutative Geometry. Academic Press (1994).

[4] P. S. Muhly, B. Solel, Quantum Markov processes (correspondences and dilations), Internat. J. Math. 13 (2002), no. 8, 863-906.

[5] Y. Sawada, Minimal dilations of CP_0-semigroups and product systems of W^*-bimodules, preprint.

[6] Y. Sawada, E_0-semigroups and relative product systems, in preparation.

[7] M. Skeide, Classification of E_0-semigroups by product systems, Mem. Amer. Math. Soc. 240 (2016), no.1137, vi+126 pp.