二次形式とモックモジュラー形式

松坂俊輝 (Toshiki MATSUSAKA)*
九州大学大学院数理学府数理学専攻 博士後期課程 1 年
日本学術振興会特別研究員（DC1）

楕円モジュラー j 函数の虚二次点での特殊値は特異モジュライとして知られる代数的数です．一方で実軸は j 函数の自然境界であり字義通りの実二次点での特殊値というものは考えられないわけですが，金子 [Kan09] は実二次点とその共役を結ぶ測地線に沿って j 函数を積分することで，然るべき実二次点での「値」を定式化しました．しかし金子による数値実験はこの「値」が代数的数になりそうにないことを示唆しており，またその整数論的な意味も未だわかっていません．一方で Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] は Zagier [Zag02] の結果の類似を考察することで，この「値」のトレースの（適切な）母函数がモックモジュラー形式をなることを明らかにしており，興味を惹くところであります．以下の小文では，上記に関連する仕事を原論文と共に振り返り，また多重調和 Maass 形式への拡張に関する私の結果について簡単に紹介したいと思います．

ここで個人的なことも振り返ると，この多重調和 Maass 形式という対象は，2017 年 3 月に米国テネシーで開かれた研究集会に参加した際に Scott Ahlgren 氏に教わりました．またその後 11 月に山名俊介氏のはからいでドイツ MPIM へ 2 週間，また 2018 年には JSPS 若手研究者海外挑戦プログラムから半年ほどケルン大学へ滞在する機会を頂き，Kathrin Bringmann 氏をはじめ，多くの方々と議論する機会がありました．特に滞在中は Markus Schwagenscheidt 氏に数学的にも私的にも大変お世話になりました．本当に様々な機会に恵まれ今回の仕事を行うことができました．この場を借りて，上に述べた方々に心から感謝を表したいと思います．

1　モックモジュラー形式とは

まずモックモジュラー形式の歴史について Duke [Duk14] に沿って簡単に振り返っておく．より詳しいことについては，例えば Zagier [Zag07]，Ono [Ono10] の記事を，またより専門的なことについては，Folsom [Fol17] や Bringmann らによる書籍 [BFOR17] を読まれたし．

モックモジュラーという名前は，Ramanujan の最後の仕事に由来する．彼が Hardy とのやり取りの中で数多くの不思議な式を見出したことは有名な話であるが，ここでは特に分割数の話を取り上げよう．分割数 $p(n)$ とは n を正の整数の和として表すときに，（その順序の違いを無視して）何通りの方法があるのかを数える量である．例えば，整数 5 は

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

と書けるため，$p(5) = 7$ と定まる．このとき Euler によって，その母函数は次のように与えられることが知られている．

$$g(q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}.$$

* toshikimatsusaka@gmail.com

これは $|q|<1$ の範囲で絶対収束する．さらに簡単な計算によって，次の Eulerian 級数と呼ばれる表示を持つこともすぐにわかる．

$$g(q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)q^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2}.$$

Hardy と Ramanujan が与えた最も重要な仕事の一つは，この分割数 $p(n)$ の漸近挙動を求める circle method と呼ばれる手法であろう．大雑把なアイデアを述べると，複素函数論の基本的な定理から，適切な Jordan 曲線 C に対し

$$p(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(q)}{q^{n+1}}dq$$

となるわけだが，その主要部というのが 1 の冪根における $g(q)$ の特異性に由来するため，それを詳しく調べよう，という方針である．一方で，$q^{-1/24}g(q)$ の逆数は Dedekind エータ函数 $\eta(z)$ として知られる重さ 1/2 のモジュラー形式となっていること（つまり $q^{-1/24}g(q)=1/\eta(z)$，$q=e^{2\pi iz}$）もわかるため，この特異性を調べることは比較的容易となる．

Ramanujan は 1920 年 4 月 26 日に 32 歳という若さでこの世を去るのであるが，その 3 ヶ月前 Hardy へ宛てた最後の手紙の中に，これと類似した，しかし似て非なる「モックテータ函数」と呼ばれる対象を 17 個の具体例と共に記した．最初の例は次のような形で与えられる．

$$f(q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)q^n:=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2}.$$

また手紙には，これらモックテータ函数は無限個の 1 の冪根 ζ において特異性を持つが，各点における特異性は（弱正則）モジュラー形式と同様である，しかし単一のモジュラー形式では全ての特異性を打ち消すことはできないだろう，ということが記されていた．これは上記 $g(q)$ が函数 $q^{1/24}/\eta(z)$ を用いて表示できた様子とは大きく異なっている．具体的に彼は，この $f(q)$ に対して $b(q):=(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)$ とおくとき，$q^{-1/24}b(q)$ がモジュラー形式であり，かつ 1 の偶数 $2k$ 乗根 ζ に対し

$$f(q)-(-1)^kb(q)=O(1)\quad\text{as } q\to\zeta$$

が成り立つこと，また奇数乗根についてはそもそも特異性を持たないことを記し，$p(n)$ と同様に，この係数 $\alpha(n)$ が漸近公式

$$\alpha(n)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{6}-\frac{1}{144}}\right)\quad\text{as } n\to\infty$$

を満たすことを記していた．具体的に与えられた 17 個のモックテータ函数が同様にこれらの性質を満たすかどうかは，その後 Watson [Wat36] ら多くの数学者によって個々の場合に確かめられた．しかしこの性質こそがモックテータ函数の真意なのであろうか，その疑問へ回答が与えられるのは，それから当分先のこととなる．

決定的なブレイクスルーが起こったのは，2002 年の Zwegers の博士論文 [Zwe02] においてである．またその後の Bruinier-Funke [BF04] による調和 Maass 形式の導入，Bringmann-Ono [BO06] などの仕事を受け，今日ではより一般にモックモジュラー形式は調和 Maass 形式の正則部分として定式化されている．(cf. Zagier [Zag07])．まずは弱正則モジュラー形式の定義と合わせて，これらを復習しよう．モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群 Γ が上半平面 $\mathfrak{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ に一次分数変換で作用するとする．このとき，なめらかな函数 $F:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ が Γ に関する重さ $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のモジュラー形式であるとは，$\gamma\in\Gamma$ に対し $|\chi(\gamma)|=1$（加えて保型因子の条件）を満たすような函数 χ が存在し，任意の $\gamma=\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\in\Gamma$ に対し

$$(F|_k\gamma)(z):=\chi(\gamma)^{-1}(\sqrt{cz+d})^{-2k}F(\gamma z)=F(z)\tag{1.1}$$

を満たすときをいう．ただし $\arg(\sqrt{z}) \in (-\pi/2, \pi/2]$ となるように分枝を取る．特に「弱正則」と接頭辞が付くときは，(1) 上半平面 $\mathfrak{H}$ 上正則で，(2) 定数 $C \geq 0$ が存在し，函数 $\mathrm{Im}(z)^{k/2}|F(z)|$ が上半平面上 $\exp(C(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z)^{-1}))$ で抑えられる，という条件を加える．例えば Dedekind エータ函数は，Dedekind 和 $s(d,c)$ を用いて（例えば [BO06, p.250]）任意の $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = i^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\pi i \left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right] \cdot \sqrt{cz+d} \cdot \eta(z)$$

を満たすこと，また $q = e^{2\pi i z}$ とおくとき $\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$ であることから，特に $1/\eta(z)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $-1/2$ の弱正則モジュラー形式といえるわけである．$F(z)$ が調和弱 Maass 形式というときは，先の条件 (1) の代わりに微分方程式 $\Delta_k F(z) = 0$ を満たすことを条件にする．ここで Δ_k は

$$\Delta_k := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

で定まる重さ k の双曲的ラプラシアンである．特に弱正則モジュラー形式は調和弱 Maass 形式となることに注意しておく．

次にこれがどのようにして Ramanujan のモックテータ函数と繋がるか見ていこう．上記のモックテータ函数 $f(q)$ に対し，Zwegers は次のような函数を考えた．

$$\begin{aligned} G(z) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(n+\frac{1}{6}\right)e^{3\pi i\left(n+\frac{1}{6}\right)^2 z} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{\frac{n^2}{24}}, \\ G^*(z) &:= 2i\sqrt{3}\int_{-\bar{z}}^{i\infty}\frac{G(\tau)}{\sqrt{-i(\tau+z)}}d\tau. \end{aligned}$$

ここで $G(z)$ は unary テータ函数と呼ばれる重さ $3/2$ のカスプテータ函数で，$G^*(z)$ はその非正則 Eichler 積分を取ったものである．このとき Zwegers および [BO06, Corollary 2.3] によると，$\chi(\gamma) = \left(\frac{12}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}$ と取れば（ここで $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は Kronecker 記号であり，ϵ_d は $d \equiv 1 \pmod 4$ のとき $\epsilon_d = 1$，$d \equiv 3 \pmod 4$ のとき $\epsilon_d = i$ と定まる），函数 $q^{-1}f(q^{24}) + G^*(24z)$ は $\Gamma_0(144)$ に関する重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式になるという．もしくは別に適切な χ を取れば [BO06, p.251, $\tilde{M}(z)$ の変換則]，$q^{-1/24}f(q) + G^*(z)$ は $\Gamma_0(2)$ に関する重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式となる．さらに Ramanujan の 17 個の例は同様に，（適切な q 冪の倍数を取ると）ある重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式の正則部分として得られるということがわかったのである．これにより Bringmann-Ono は $f(q)$ のフーリエ係数 $\alpha(n)$ に関する精密化された漸近公式（Andrews-Dragonette 予想）を解決したのであった．

その後 2007 年に Zagier[Zag07] によって，より一般にモックモジュラー形式と呼ばれる対象が導入された．簡単のため，以下この報告集を通して正の整数 N に対し $\Gamma = \Gamma_0(N)$ とし，$\chi(\gamma)$ を $k \in \mathbb{Z}$ のとき $\chi(\gamma) = 1$，$k \in \mathbb{Z} + 1/2$ のとき $\chi(\gamma) = \left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-2k}$ かつ $4|N$ としておく．（これは自然な取り方である，例えば [Kob93, Chapter IV-1]）．このとき重さ $k \neq 1$ の調和弱 Maass 形式 $F(z)$ は $F(z+1) = F(z)$ および $\Delta_k F(z) = 0$ を満たすため，次の形のフーリエ級数展開を持つことがわかる．

$$F(z) = \sum_{n\gg-\infty} c_F^+(n)q^n + c_F^-(0)y^{1-k} + \sum_{\substack{n\ll\infty \\ n\neq 0}} c_F^-(n)y^{-\frac{k}{2}}W_{-\frac{k}{2},\frac{k-1}{2}}(-4\pi ny)e^{2\pi inx}.$$

ただし，$n \gg -\infty$ はある $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $n \geq -n_0$ という意味であり，$n \ll \infty$ も同様である．また $W_{\mu,\nu}(z)$ は W-Whittaker 函数であり，$\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ となるように分枝を取っておく．$c_F^{\pm}(n) \in \mathbb{C}$ は Fourier 係数と呼ばれる定数である．特殊函数については，例えば [NIST, MOS66, GR00] などが公式集とし

て便利であろうか．このとき，この正則部分

$$\sum_{n\gg-\infty} c_F^+(n)q^n$$

を重さ k のモックモジュラー形式と呼ぶ．さらに Bruinier-Funke [BF04] は微分作用素 $\xi_k F := 2iy^k\overline{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}}$ を導入し，これが双曲ラプラシアンの細分 $\Delta_k = -\xi_{2-k}\circ\xi_k$ を与え，調和弱 Maass 形式の像

$$\xi_k F(z) = (1-k)\overline{c_F^-(0)} - \sum_{\substack{n\gg-\infty\\ n\neq 0}} \overline{c_F^-(-n)}(4\pi n)^{1-\frac{k}{2}}q^n$$

（ただし $n<0$ に対し $n=|n|e^{\pi i}$）が重さ $2-k$ の弱正則モジュラー形式になることを示している．また Zagier はこの像をモックモジュラー形式のシャドーと呼んでいる．特にこの ξ-微分は重さ $2-k$ の弱正則モジュラー形式の空間への全射を与えることも知られている．これが今日におけるモックモジュラー形式の定義である．ちなみにこのようにして定まるモックモジュラー形式は Ramanujan の与えた条件を満たすことが [GOR13], [CLR16] によって示されている．

2　特異モジュライ・サイクル積分のトレースとは

次の主題へ移ろう．楕円モジュラー j 函数は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する（$\chi(\gamma)=1$）重さ 0 の弱正則モジュラー形式で $q^{-1}+O(q)$ の形のフーリエ級数展開を持つものとして一意に特徴付けられる函数である．ここでこの定義は Eisenstein 級数を用いた定義 $E_4(z)^3/\Delta(z)$ とは 744 だけずれていることに注意しておく．この函数の活躍の場は，モンスタームーンシャインや虚数乗法論など多岐にわたる．より詳しいことについては，金子 [Kan01, KS10] などに日本語でまとめられているため，そちらに譲ることにする．今回着目するのは Zagier [Zag02] による「特異モジュライのトレース」に関する仕事である．

まず二次形式について復習する．整数 d を $d\equiv 0,1 \pmod 4$ を満たすように取る．このとき，整数係数の二元二次形式 $Q(X,Y)=[a,b,c]=aX^2+bXY+cY^2$ でその判別式が $b^2-4ac=d$ で与えられるもの全体の空間を $\mathcal{Q}_d$ と定める．ただし $d<0$ のときは正定値なもの，つまり $a>0$ なるもののみを考えることにする．この空間には

$$Q(X,Y)\circ\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} := Q(\alpha X+\beta Y, \gamma X+\delta Y)$$

によって自然に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が右から作用しており，その商 $\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は有限となることが知られている．特に d が基本判別式のとき（つまり $d\equiv 1 \pmod 4$ かつ square-free，または square-free な $m\equiv 2,3 \pmod 4$ を用いて $d=4m$ と書けるとき），この位数 $|\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})|$ は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の狭義類数を与える．（d が基本判別式でなくても同様の結果は知られている，例えば [AIK14, Chapter 6] に詳しい．d が平方数のときは [Koh85, p. 243] など）．

まず正定値：$d<0$ の場合を考える．二次形式 $Q\in\mathcal{Q}_d$ に対して，上半平面上の点 $\alpha_Q\in\mathfrak{H}$ を $Q(z,1)=0$ の解として定めよう．定義よりこれは虚二次無理数となり，この点 α_Q における j 函数の値 $j(\alpha_Q)$ は代数的数になることが知られている．この量は特異モジュライと呼ばれ，Kronecker 青春の夢で知られるように虚二次体上の類体構成において非常に重要な役割を果たす．一方 Zagier は以下で定めるこの値の重み付きトレースを考察した．

$$\mathrm{Tr}_d(j) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|} j(\alpha_Q).$$

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q$ は Q の固定部分群であり，その位数は $6,4,2$ のいずれかである．このとき，$\mathrm{Tr}_d(j)$ は有理整数であり，母函数

$$-\frac{1}{q}+2+\sum_{0>d\equiv 0,3(4)}\mathrm{Tr}_d(j)q^{-d}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $3/2$ の弱正則モジュラー形式となる，というのが彼の主張である．さらに一般に，基本判別式 D に対して種の指標 χ_D を

$$\chi_D(Q):=\begin{cases}\left(\dfrac{D}{r}\right), & (a,b,c,D)=1 \text{ かつ } (r,D)=1,\ \text{ただし } Q \text{ は } r \text{ を表現する},\\ 0, & (a,b,c,D)>1.\end{cases}$$

と定めると，これは $\mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上の well-defined な指標となる．（詳しくは [GKZ87, Section I-2] など）．さらに χ_1 を自明な指標と定めておくことで，$D=1$ も考慮に入れることにする．このとき $dD<0$ となるような $d\equiv 0,1 \pmod 4$ に対し，捻りトレース

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(j):=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\chi_D(Q)\frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|}j(\alpha_Q)$$

を定める．このとき一般にはこの値は有理整数とはならないが，Zagier は次のことも示している．D の符号に応じて，2 種類の母函数

$$(\text{適切な有限項})+\sum_{0>d\equiv 0,1(4)}\mathrm{Tr}_{d,D}(j)q^{-d}\quad \text{if } D>0, \tag{2.1}$$

$$(\text{適切な有限項})+\sum_{0<d\equiv 0,1(4)}\frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{Tr}_{d,D}(j)q^{d}\quad \text{if } D<0 \tag{2.2}$$

はそれぞれ $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 3/2，1/2 の弱正則モジュラー形式となる．ここで適切な有限項は explicit に表示することも可能であるが，本報告集では重要としないため省略している．なお遡ること 1975 年，Zagier [Zag75] は j 函数を 1 に変えた場合，つまり Kronecker-Hurwitz 類数

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1):=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|} \tag{2.3}$$

に対しても同様の考察を行っており，（もちろんそのように主張したわけではないが）母函数

$$-\frac{1}{12}+\sum_{0>d\equiv 0,1(4)}\mathrm{Tr}_{d,1}(1)q^{-d} \tag{2.4}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 3/2 のモックモジュラー形式になることを示している．つまり適切な非正則函数を加えることで調和 Maass 形式となるのであるが，そのシャドー（非正則部分の ξ-像）はテータ函数 $\theta(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}$ の定数倍で与えられる．蛇足であるが，この類数 $\mathrm{Tr}_{d,1}(1)$ が重さ 3/2 のモジュラー形式 $\theta(z)^3$ の係数に現れることは，（本質的には）Gauss [Gau01, art. 291] によって知られていた．Zagier の結果はある種の補正版ともいえるであろう．具体的な表示は例えば [BFOR17, Example 2.5] でも確認できる．

自然な疑問として，不定値：$d>0$ の場合も考えて然るべきであるが，この場合は $Q(z,1)=0$ の解は互いに共役な二つの実二次無理数となっており，j 函数の自然境界が実軸であることを踏まえると，同様の考察を行うには困難がある．一つの回答として金子 [Kan09] は Hecke の双曲的フーリエ展開の定数項を取り出すことで，実二次点での「値」にあたるものを考察している．（同様のフーリエ展開は Petersson [Pet41] も考えていたようである）．金子 [KS10] にもあるとおり，この「値」はサイクル積分を用いて記述することもできるため，ここではそちらの定義を採用することにする．平方数でない $0<d\equiv 0,1 \pmod 4$ に対して，$Q(z,1)\in\mathcal{Q}_d$ の

二つの根を $w_Q^{\pm} = (-b \pm \sqrt{d})/(2a) \in \mathbb{R}$ とおき，w_Q^+ から w_Q^- へ向かう上半平面上の測地線を S_Q とおく．この測地線を固定するような部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q$ は（符号の差を除き）無限巡回群になることが知られており．（例えば [Sar82] などに詳しくまとめられている），商 $C_Q := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q \backslash S_Q$ はリーマン面 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の閉測地線を与える．特に ε_d を整環 $\mathfrak{O}_d$ の単数で，正ノルムを持つ >1 なる最小の元とすると，この測地線の長さは

$$\mathrm{length}(C_Q) := \int_{C_Q} d_{\mathrm{hyp}}(z) = \int_{C_Q} \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)} = 2\log\varepsilon_{d/r^2} \tag{2.5}$$

で与えられる．ここで $r = \gcd(a,b,c)$ である．このとき，j 函数の実二次点での「値」は

$$\mathrm{val}(w_Q^+) := \frac{1}{\mathrm{length}(C_Q)} \int_{C_Q} j(z) d_{\mathrm{hyp}}(z) = \frac{1}{2\log\varepsilon_{d/r^2}} \int_{C_Q} j(z)\frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)} \tag{2.6}$$

で定義される．ここでも金子の定義と 744 だけずれていることに注意しておく．金子は数値実験を通して様々な観察を行っているが [Kan09, KS10]，特異モジュライのときのような代数的数にはなりそうになく，またその整数論的な意味も未だわかっていない．（最近，Bengoechea-Imamoḡlu [BI19+a, BI19+b] によって，いくつかの予想には部分的に証明が与えられている）．一方で，Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] は，この「値」が Zagier の結果の類似を満たすことを示した．まずトレースを同様に定義しよう．基本判別式 $D>0$ と $0<dD$ が平方数とならないような $d \equiv 0,1 \pmod 4$ に対し，捻りトレースを

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(j) := \frac{1}{2\pi} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \chi_D(Q) \int_{C_Q} j(z) \frac{\sqrt{dD}dz}{Q(z,1)}$$

によって定める．このとき dD が平方数となるような d に対し，適切な値 $\mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j)$ が存在し，母函数

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ dD=\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j) q^d + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ dD\neq\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,D}(j) q^d \tag{2.7}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 1/2 のモックモジュラー形式になることを示した．ちなみに $d<0, D<0$ の場合はこの捻りトレースは自明に 0 となる．$\mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j)$ については，その後 [And15, BFI15] などにおいて然るべき定義が与えられている．さらにこのモックモジュラー形式のシャドーは (2.1) の定数倍で与えられる．なんとも興味を誘う現象である．さらに Duke ら [DIT11] は (2.3) の実二次類似

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1) := \frac{1}{2\pi} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{C_Q} \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)}$$

についても考察している．先の議論から特に基本判別式 d に対して，二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の狭義類数 $h(d)$ を用いて $h(d)\log\varepsilon_d/\pi$ と表される量であり，Dirichlet の L 函数 $L_d(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$ を用いることで，基本判別式 d の正負問わず

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1) = \frac{\sqrt{|d|}}{\pi} L_d(1)$$

と表示することもできる．（Dirichlet の類数公式）．このとき彼らは，母函数

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ d=\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,1}^{\mathrm{reg}}(1) q^d + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ d\neq\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,1}(1) q^d$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 1/2 の「深さ 3/2 の多重調和 Maass 形式」の正則部分になることを示した．またその $\xi_{1/2}$ に関する像は (2.4) で与えられた調和 Maass 形式の定数倍となる．

ここからもこのような現象が j 函数に限らずより一般にあることが見て取れる．実は j 函数の部分を一般に調和弱 Maass 形式にしても同様の現象が成り立つことも知られている．例えば Schwagenscheidt の博士論文 [Sch18] に詳しくまとめられているので，興味のある方はそちらを参照されたし．しかし上の例からも，この事象は調和弱 Maass 形式の範疇に収まっていないこともわかる．多重調和 Maass 形式とは一体何であろうか？

3 多重調和弱 Maass 形式とは

多重調和 Maass 形式という名前が初めて登場したのは 2016 年の Lagarias-Rhoades [LR16] および続編となる [ALR18] の論文中である．レベル 1 の実解析的 Eisenstein 級数とは，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \Gamma_\infty = \{\pm\left[\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] \in \Gamma \mid b \in \mathbb{Z}\}$ とおくとき，$z = x + iy \in \mathfrak{H}, \mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$E(z,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}(\gamma z)^s$$

によって定まる函数である．この函数は s-平面全体に有理型解析接続を持ち，特に

$$E(z,s) = \frac{3/\pi}{s-1} - \frac{3}{\pi}\log(y|\eta(z)|^4) + C + O(s-1)$$

が成り立つことが知られている（Kronecker の第一極限公式）．ここで定数 C は Euler 定数 γ を用いて $C = \frac{6}{\pi}(\gamma - \log 2 - 6\zeta'(2)/\pi^2)$ と与えられるものである．Eisenstein 級数に関しては，例えば [Iwa02] などを参照．この定数項について実に多くの研究があるが，一方で高次の Laurent 係数というのは，知られていることは少ない．Lagarias らはこれら高次係数について，調和 Maass 形式の観点から考察を行なっている．

よく知られているように，この Eisenstein 級数は双曲的ラプラシアンの固有函数であり，以下を満たす．

$$\Delta_0 E(z,s) = s(1-s)E(z,s).$$

実はこれからすぐに従うこととして，$E(z,s) = \sum_{\ell=-1}^{\infty} F_\ell(z)(s-1)^\ell$ と展開するとき，各係数 $F_\ell(z)$ は微分方程式 $(\Delta_0)^{\ell+2}F_\ell(z) = 0$ を満たす．さらに $E(z,s)$ のモジュラー性が伝播する形で，任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し $F_\ell(\gamma z) = F_\ell(z)$ が成り立つ．彼らはこれらの性質に着目して，そのような条件を満たすクラスを多重調和 Maass 形式として新たに導入した．Lagarias らの論文では，カスプでの指数増大が許されておらず，より広い意味での「多重調和弱 Maass 形式」は [Mat19+, Mat19] において導入した．正確な定義は，(1.1) で与えた定義の (1) を $(\Delta_k)^r F(z) = 0$ に取り替えることで与える．このとき $F(z)$ を Γ に関する重さ k，深さ r の多重調和弱 Maass 形式と呼ぶことにする．さらに $\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k$ であったことを思い出して，$\xi_k \circ (\Delta_k)^r F(z) = 0$ を満たすものを，深さ $r + 1/2$ の多重調和弱 Maass 形式と呼ぶ．例えば Kronecker 極限公式で与えられる函数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 0，深さ 3/2 の多重調和 Maass 形式となる．（この場合はカスプで高々多項式増大しか持たないので，弱の付かない Lagarias らの意味での多重調和 Maass 形式となる）．

この函数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ の捻れトレースについても古くから多くの研究がなされている．Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT18] において詳しくまとめられているが，例えば Kronecker, Lerch, Chowla-Selberg, Siegel, Deninger などが $\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$ について様々な公式を与えている [DIT18, (40), (41), (64), (65)]．一方で上で見たように，捻りトレースの母函数は半整数重さのモジュラー性を持つという哲学もある．それならば多重調和弱 Maass 形式の枠組みで，これら古典的な結果を再構築できないだろうか，というのが自然な問いであろう．この問いに答えるべく，本研究 [Mat19+, Mat19] では次のことを行なった．

1. 重さ $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$（$k \in \mathbb{Z}+1/2$ のときは $\Gamma_0(4)$）に関する多重調和弱 Maass 形式の空間の基底を explicit に構成した：Lagarias-Rhoades [LR16] は，カスプに指数増大を許さない場合について，重さ $k \in 2\mathbb{Z}$ の実解析的 Eisenstein 級数の Laurent 係数を用いて整数重さの場合にその基底を構成していた．弱版については，[BO06] と同様に Maass-Poincaré 級数を考えることで，Δ_k の固有値から定まる適切な点まわりにおける高次 Laurent 係数が多重調和弱 Maass 形式となることがわかる．ここで Maass-Poincaré 級数とは，整数 $m \neq 0$ に対し，M-Whittaker 函数を用いて

$$P_{k,m}(z,s) := \Gamma(2s)^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left[(4\pi|m|y)^{-\frac{k}{2}} M_{\mathrm{sgn}(m)\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi|m|y) e^{2\pi i m x} \right] \Big|_k \gamma$$

によって定まる函数である．半整数重さの場合も同様である [Mat19]．さらにこの Laurent 係数たちが多重調和弱 Maass 形式の空間を張ることもわかり（余分な函数もある），explicit に基底を記述することもできる．[Mat19+, Theorem 1.4], [Mat19, Theorem 1.1]．またこれらの係数が満たす微分漸化式（Lagarias らは "ramp"関係式や "tower"関係式と呼んでいる）もより一般に示すことができる．[Mat19, (4.2), (4.3)].

2. Zagier, Duke-Imamoḡlu-Tóth の結果を多重調和弱 Maass 形式の捻れトレースに拡張した：1 で函数 $P_{0,m}(z,s)$ の Laurent 係数を用いて，重さ 0 の多重調和弱 Maass 形式の空間の基底を構成しているため，捻れトレース $\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{0,m}(z,s))$ を考察すれば十分である．多少技術的ではあるが [DIT11] によってこれは計算されており，Bessel 函数などの特殊函数を用いて表示することができる．一方で半整数重さの場合も基底が求まっており，その Fourier 係数も同様に特殊函数を用いて表示される [Mat19, Proposition 3.2]．これらの表示を直接見比べることで，重さ 0 から重さ 1/2 または 3/2 の多重調和弱 Maass 形式間の写像で，その Fourier 係数が捻りトレースで与えられるものを具体的に構成することができる [Mat19, Theorem 1.3, Section 7] というのが大まかな流れである．さらに定義を適切に修正したのち $\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s))$ という量も考えることができるが，Duke らの計算を拡張することでこのトレースも explicit に計算することができ，同様の写像（重さ $2k$ から重さ $k+1/2$ または $3/2-k$）を構成することもできる．特に Schwagenscheidt ら [Sch18] は調和弱 Maass 形式に対し，$dD<0, k \leq 0$ または $dD>0, k \geq 0$ の場合において，テータリフトを用いることでこの写像を構成しているのだが，欠けているケース，例えば $dD<0, k>0$ においても同様の写像を構成できた．これは (2.1), (2.2), (2.7) の重さ $2k$ の多重調和弱 Maass 形式への拡張を与えている．

最後に系を一つ紹介しよう．上記の定理を用いて $0<d$，$D \neq 1$ に対し $\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$，および $\mathrm{Tr}_{d,1}(1)$ を正則部分の Fourier 係数に持つ多重調和 Maass 形式をそれぞれ構成する．こうして作られる多重調和 Maass 形式は全て $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 1/2，深さ 3/2 となること，また $\theta(z)$ の差および定数倍の差を除いて等しいことがわかる．あとは Fourier 係数を比較することで次の分解公式を得る [Mat19, Corollary 1.4].

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \sqrt{|D|} L_D(1) \mathrm{Tr}_{d,1}(1), \quad 0<d \neq \square, D \neq 1, dD \neq \square.$$

これは d, D が互いに素な基本判別式のときに Kronecker ($dD<0$)，Siegel ($dD>0$) によって示されている等式である [DIT18, (41), (65)] が，今回の系では多重調和 Maass 形式を用いた自然な別証明が与えられており，特にここでは d は D と無関係な（平方数でない）任意の判別式を取ることができる．例えば $d=20, D=-4$ とすれば，$\mathcal{Q}_{-80}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{[3,-2,7],[1,0,20],[2,0,10],[4,0,5],[3,2,7],[4,4,6]\}$，$\mathcal{Q}_{20}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{[1,-4,-1],[2,-2,-2]\}$ であることから，以下を得る．

$$\mathrm{Tr}_{20,-4}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \log \frac{4}{9} \left| \frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)} \right|^4,$$

$$\mathrm{Tr}_{20,1}(1) = \frac{\log \varepsilon_{20}}{\pi} + \frac{\log \varepsilon_5}{\pi} = \frac{8}{\pi} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

また $L_{-4}(1)=\pi/4$ より，

$$\frac{4}{9}\left|\frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)}\right|^4=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4,\quad \text{i.e.}\qquad \left|\frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)}\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

参考文献

[AIK14] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2014, with an appendix by Don Zagier.

[And15] N. Andersen, *Periods of the j-function along infinite geodesics and mock modular forms*, Bull. Lond. Math. Soc., 47, no. 3, (2015), 407–417.

[ALR18] N. Andersen, J. C. Lagarias, R. C. Rhoades, *Shifted polyharmonic Maass forms for $PSL(2,\mathbb{Z})$*, Acta Arith., 185, (1), (2018), 39–79.

[BI19+a] P. Bengoechea, Ö. Imamoḡlu, *Cycle integrals of modular functions, Markov geodesics and a conjecture of Kaneko*, arXiv:1805.08029.

[BI19+b] P. Bengoechea, Ö. Imamoḡlu, *Values of modular functions at real quadratics and conjectures of Kaneko*, arXiv:1812.07418.

[BFOR17] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, L. Rolen, *Harmonic Maass Forms and Mock Modular Forms: Theory and Applications*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. xv+391 pp.

[BO06] K. Bringmann, K. Ono, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks*, Invent. Math., 165, (2), (2006), 243–266.

[BF04] J. H. Bruinier, J. Funke, *On two geometric theta lifts*, Duke Math. J., 125, (1), (2004), 45–90.

[BFI15] J. H. Bruinier, J. Funke, Ö. Imamoḡlu, *Regularized theta liftings and periods of modular functions*, J. Reine Angew. Math., 703, (2015), 43–93.

[CLR16] D. Choi, S. Lim, R. C. Rhoades, *Mock modular forms and quantum modular forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 144, 6, (2016), 2337–2349.

[Duk14] W. Duke, *Almost a century of answering the question: what is a mock theta function?*, Notices Amer. Math. Soc., 61, (11), (2014), 1314–1320.

[DIT11] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, *Cycle integrals of the j-function and mock modular forms*, Annals of Math., 173, (2011), 947–981.

[DIT18] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, *Kronecker's first limit formula, revisited*, Res. Math. Sci. 5, no. 2, (2018), 1–21.

[Fol17] A. Folsom, *Perspectives on mock modular forms*, J. Number Theory, 176, (2017), 500–540.

[Gau01] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.

[GR00] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Translated from the Russian. Sixth edition. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. Academic Press, Inc., San Diego, CA, (2000), xlvii+1163 pp.

[GOR13] M. Griffin, K. Ono, R. C. Rhoades, *Ramanujan's mock theta functions*, Proc. Nat. Acad. Sci., 110, 15, (2013), 5765–5768.

[GKZ87] B. Gross, W. Kohnen, D. Zagier, *Heegner points and Derivatives of L-series, II*, Math. Ann., 278, (1987), 497–562.

[Iwa02] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Revista Math. Iberoamericana, Madrid, second edition, 2002.

[Kan01] M. Kaneko, 楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ のフーリエ係数，Rokko Lectures in Math., 10, 神戸大学理学部数学教室 (2001).

[Kan09] M. Kaneko, *Observations on the 'values' of the elliptic modular function $j(\tau)$ at real quadratics*, Kyushu J. Math., vol. 63-2, (2009), 353–364.

[KS10] M. Kaneko, N. Shigeki, 楕円モジュラー j 関数の実二次点での「値」とマルコフ二次無理数，早稲田大学整数論研究集会報告集 (2010).

[Kob93] N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms, Second edition*, Graduate Texts in Math., 97, Springer-Verlag, New York, (1993), x+248 pp.

[Koh85] W. Kohnen, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann., 271, (1985), 237–268.

[LR16] J. C. Lagarias, R. C. Rhoades, *Polyharmonic Maass forms for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, Ramanujan J., 41, (2016), 191–232.

[MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52 Springer-Verlag New York, Inc., New York, (1966), viii+508 pp.

[Mat19+] T. Matsusaka, *Polyharmonic weak Maass forms of higher depth for* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, Ramanujan Journal, to appear.

[Mat19] T. Matsusaka, *Traces of CM values and cycle integrals of polyharmonic Maass forms*, Res. Number Theory, 5:8, (2019), 1–25.

[NIST] *Digital Library of Mathematical Functions*, http://dlmf.nist.gov/.

[Ono10] K. Ono, *The last words of a genius*, Notice Amer. Math. Soc., 57, (11), (2010), 1410–1419.

[Pet41] H. Petersson, *Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., (1941), 22–60.

[Sar82] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, 15, (1982), 229–247.

[Sch18] M. Schwagenscheidt, *Regularized theta lifts of harmonic Maass forms*, PhD thesis, TU Darmstadt, 2018.

[Wat36] G. N. Watson, *The final problem: An account of the mock theta functions*, J. London Math. Soc. 2, (2), (1936), 55–80.

[Zag75] D. Zagier, *Nombres de classes et formes modulaires de poids* $3/2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B 281, (1975), no. 21, Ai, 883–886.

[Zag02] D. Zagier, *Traces of singular moduli*, Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., 3, Int. Press. Somerville MA, (2002), 211–244.

[Zag07] D. Zagier, *Ramanujan's mock theta functions and their applications* [*d'après Zwegers and Bringmann-Ono*], Séminaire Bourbaki, 60 ème année, 2007–2008, no. 986, Astérisque, 326, (2009), Soc. Math. de France, 143–164.

[Zwe02] S. P. Zwegers, *Mock Theta Functions*, Ph.D. Thesis, Utrecht University, 2002.