Factorizability of tensoring quantum channels with the completely depolarizing channel

北海道大学大学院理学院 数学専攻
植田 優基 (Yuki UEDA) *

1 はじめに

近年, 量子コンピューターの研究が進み, ベンチャー企業をはじめとする多方向からの関心が高まってきている. それは 2011 年にカナダの企業である D-Wave Systems が量子コンピューター「D-Wave」の建造に成功したと発表したことをきっかけに, Google 社を筆頭とする多くのベンチャー企業が D-Wave 社と協業を開始し, 本格的な量子コンピューター実現の可能性が高まったからだと考えられる. **量子コンピューター**とは, 大雑把に言えば, 量子力学的な状態の重ね合わせを用いて演算の並列性を実現すると期待されるコンピューターのことで, 従来のコンピューターの情報量の単位「ビット」に対応する「量子ビット」と呼ばれる重ね合わせの状態を 1 つの情報量として扱うものである. つまりビットは「0 か 1」といった 2 値を表すいずれかの状態でもつ情報量の単位であるのに対し, 量子ビットは「0 と 1」の両方を確率論的に表現した状態 (重ね合わせの状態) でもつ情報量の単位である. 例えば n ビットの情報を全て解析するには全部で 2^n 通りの演算を行う必要があるが, n 量子ビットであれば 2^n 通りの状態を重ね合わせで表現するため, 1 回の演算 (しかもエネルギーを消費せずに! [1]) で解析することができる. こういった性質をもつことから実現が可能となれば, 現在存在している暗号理論 (RSA 暗号や楕円曲線暗号など) に基づいた暗号化を短時間で解析することができるとされている. そのため, 量子情報理論における研究としては, 量子コンピューターの仕組みについての研究 (実現化に向けた量子力学における概念の整備や量子ゲート方式のような論理ゲートの構築) をはじめとし, 量子コンピューターによる暗号解析に対抗するための量子暗号理論や, 量子状態の通信路 (チャネル) 理論の研究や実験などがある. 本研究は, 主に「量子状態の通信路理論」に相当する領域に関する研究であり, ノイズが入った通信路から得られる結果についてまとめたものとなっている.

2 量子チャネルの定義

この節では, 量子状態の通信路 (量子チャネル) がどういったものかについて解説する. 今後, 以下の記号をよく用いることに注意する.

- M_n: $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列環
- $1_n \in M_n$: n 次単位行列
- $A^* \in M_n$: $A \in M_n$ の転置共役行列
- $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \in M_n$: 対角成分を $x_1, \cdots, x_n$ とする n 次対角行列 (対角ブロック行列を表すこともある)
- I_n: M_n 上の恒等写像, つまり $I_n(x) = x$, $x \in M_n$
- Tr_n: n 次正規化トレース, つまり $\mathrm{Tr}_n(x) = \frac{1}{n}(x_{11} + \cdots + x_{nn})$, $x = (x_{ij}) \in M_n$
- $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$: M_n の (内部) 自己同型群に関する凸包
- $\mathcal{U}(\mathcal{M})$: von Neumann 環 $\mathcal{M}$ 内のユニタリ作用素全体の集合

*yuuki1114@math.sci.hokudai.ac.jp

まずはじめに (有限次元の) 量子チャネルの数学的な定義について述べる．一般には無限次元の量子チャネルが定義されるが, ここでは有限次元の場合のみに限定する．

定義 2.1. 次の条件を満たす M_n 上の線形写像 $T : M_n \to M_n$ を**量子チャネル**と呼ぶ．
(1) T は**単位的**である, つまり $T(1_n) = 1_n$.
(2) T は**トレース保測**である, つまり, $\mathrm{Tr}_n \circ T = \mathrm{Tr}_n$.
(3) T は**完全正**である, つまり, 全ての自然数 k に対して, $T \otimes I_k : M_n \otimes M_k \to M_n \otimes M_k$ は正写像．

量子コンピュータの動作過程は, 入力した状態の変化を与えるユニタリ変換で表される計算過程と, 送信先で観測し実際に得られた状態が出力される観測過程の 2 つに分けられる．これらの別々の動作過程はどちらとも量子状態の変化として見ることができることから, 同一の数学的モデルで表現できると考えられる．こういった一連の動作過程をまとめて表現したものが量子チャネルであり, 情報 (量子状態) の入力から出力に変換する通信路のような役割を担っている (詳しくは [5] による解説を参照のこと)．ここで重要な量子チャネルであるユニタリチャネルについて解説する．

定義 2.2. 線形写像 $T : M_n \to M_n$ がユニタリチャネルであるとは, あるユニタリ行列 $U \in M_n$ が存在し,

$$T(x) = U^* x U, \qquad x \in M_n$$

と表される量子チャネルのことをいう．

ユニタリチャネルは, 入力した状態の変化を与える際に行われる計算過程の部分を表した量子チャネルである．量子コンピューターを介して起こる状態の変化は確率論的に色々な可能性をもっているため, 量子チャネルの計算過程はユニタリチャネルの重ね合わせで表現される．例えば,

$$T(x) = \frac{2}{3} U^* x U + \frac{1}{3} V^* x V$$

(ただし U, V はユニタリ行列) と表された量子チャネル T は大雑把に言えば, 出力状態 x が確率 $\frac{2}{3}$ で $U^* x U$ に状態変化が起こり, 確率 $\frac{1}{3}$ で $V^* x V$ に状態変化が起こる計算過程をもった量子チャネルであると考えられる．ところでユニタリチャネルは線形写像の言葉で言えば, 行列環 M_n の内部自己同型であるため, それらの重ね合わせとは凸包 $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ の元であると言える．そのため, 量子チャネルが凸包 $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ に含まれているかどうかは重要な問題である (全ての量子チャネルが $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ に含まれるとは限らない).

3 問題設定と主結果

本研究の主結果は [4] による．まず問題設定を述べる前に, Haagerup と Musat が [3] において得られた結果について紹介する．

定理 3.1. [Haagerup, Musat, 2015] $T : M_n \to M_n$ を量子チャネルとし, あるユニタリ行列 U と自然数 k が存在し

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_k)(U^*(x \otimes 1_k)U), \qquad x \in M_n,$$

と表現されているとする．このとき, $T \otimes S_k \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))$ となる．

ここで線形写像 $S_k : M_k \to M_k$ は

$$S_k(x) := \mathrm{Tr}_k(x) 1_k, \qquad x \in M_k$$

で定義される量子チャネルであり, k **次 Completely depolarizing チャネル**と呼ばれる (どのように和訳されるのかは筆者は知らない)．古典 (従来の) コンピューターの場合でもそうだが, ある (量子) 状態を入力系から出力系に送信する際に外部からのノイズを受けることで, 元々想定されていた出力状態と異なる状態が出力される問題が生じる (古典の場合には誤り訂正理論といったノイズを考慮した情報系を解析する理論が存在する)．量子情報系の場合にもこの問題に立ち向かいたい．そこで Completely depolarizing チャネルをテンソル積するという事は, 元々の量子チャネルにある種のノイズ (色々な要因はあるが...) を考慮した, 新たな量子チャネルを解析することに対応する．ではノイズを含んだ量子チャネルから真の量子チャネルを引き出すことはできるのか? この問題は, 「**定理 3.1** の逆は成立するか?」という問題に解釈することができる．本研究では, まずこの問題が部分的に正しいという事を証明した．

定理 3.2. $T : M_n \to M_n$ を量子チャネルとし,

$$T \otimes S_k(z) = \sum_{i=1}^{N} p_i U_i^* z U_i \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k)), \qquad z \in M_n \otimes M_k$$

を満たすとする．ただし $p_i > 0$ は $p_1 + \cdots + p_N = 1$ を満たす正の有理数とし, $p_i = \frac{L_i}{L}$ ($L_i, L > 0$ は整数) と表されるとする．また $U_i \in M_{nk}$ はすべてユニタリ行列とする．このとき

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_{kL})(U^*(x \otimes 1_{kL})U), \qquad x \in M_n,$$
$$U = \mathrm{diag}(\overbrace{U_1, \cdots, U_1}^{L_1}, \cdots, \overbrace{U_N, \cdots, U_N}^{L_N}) \in \mathcal{U}(M_{nkL})$$

が成立する．

この結果を使う事によって, 限定的な設定になってしまうが, ある種ノイズが加わった量子チャネルから真の量子チャネルを (少ない計算で) 見つけ出すことができる．例を一つ挙げてみよう．

例 3.3. 2 次 Completely depolarizing チャネル S_2 による T のテンソル量子チャネルが次の表示をもつとする．

$$T \otimes S_2(z) = \frac{2}{5} z + \frac{3}{5} u^* z u, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{U}(M_4).$$

(物理的解釈) $T \otimes S_2$ は, 入力状態 $z \in M_4(\mathbb{C})$ を, 確率 2/5 で状態 z として, 確率 3/5 で状態 $u^* z u$ として, "2 つの状態の重ね合わせ" で出力する通信路である．

定理 **3.2** から 2 次元量子チャネル T は次のような表示をもつ．

$$T(x) = (I_2 \otimes \mathrm{Tr}_{10})(U^*(x \otimes 1_{10})U), \qquad x \in M_2,$$
$$U = \mathrm{diag}(1_4, 1_4, u, u, u) \in \mathcal{U}(M_{20}).$$

ここで

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$$

を考えると,

$$T(E_{11}) = \frac{7}{10} E_{11} + \frac{3}{10} E_{22}, \quad T(E_{12}) = \frac{1}{10} E_{12} - \frac{3}{10} E_{21},$$
$$T(E_{21}) = \frac{1}{10} E_{21} - \frac{3}{10} E_{12}, \quad T(E_{22}) = \frac{7}{10} E_{22} + \frac{3}{10} E_{11}.$$

従って $x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22}$ に対して

$$\begin{aligned} T(x) &= x_{11}T(E_{11}) + x_{12}T(E_{12}) + x_{21}T(E_{21}) + x_{22}T(E_{22}) \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7x_{11} + 3x_{22} & x_{12} - 3x_{21} \\ -3x_{12} + x_{21} & 3x_{11} + 7x_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって T は入力状態 x に対して, 上のような出力状態 (行列) を与える量子チャネルであることが解った．

ところで定理 **3.2** は, $T \otimes S_k$ の表現がいくつかのユニタリチャネルの有理係数凸結合であったことで成立したのだが, 有理係数であることが本質的であることを次のような反例を挙げて証明した．

定理 3.4. $0 < \lambda < 1$ を無理数とする, また $T_\lambda : M_3 \to M_3$ は次で定義される量子チャネルとする．

$$T_\lambda(x) := \lambda x + (1 - \lambda) U^* x U, \qquad x \in M_3$$
$$U = \mathrm{diag}(1, i, -1) \in \mathcal{U}(M_3)$$

このとき, T_λ は任意の自然数 N と任意のユニタリ行列 $V \in M_{3N}$ で

$$T_\lambda(x) = (I_3 \otimes \mathrm{Tr}_N)(V^*(x \otimes 1_N)V), \qquad x \in M_3$$

と表すことが出来ない．

4　今後の課題

4.1　ノイズ込みの量子チャネルから真の量子チャネルを求める問題

第 2 節で, $T \otimes S_k$ の表現はユニタリチャネルの有理係数凸結合でなければ, **定理 3.2** は一般には成立しないことが解った. つまり有理係数でなければ, **例 3.3** のような手法で, ノイズが入った量子チャネルから真の量子チャネルを得ることが出来ない. しかし現実的には有理係数以外の場合も扱いたいため, より一般の (有理係数だけでなく無理係数も認める) ノイズ込みの量子チャネルから, 真の量子チャネルを得る別の手法を提示することが今後の課題となる.

4.2　Connes Embedding Problem との関連問題

数学的にも非常に重要な問題が残っている. それは作用素環論における未解決問題である **Connes Embedding Problem** との関連である. Connes Embedding Problem は von Neumann 環の一種である $\mathbf{II}_1$ **型 因子環**と呼ばれるクラスに関連した問題 (ここでは詳しくは解説しない) であり, Connes が 70 年代にこの問題を提起してから未だ未解決である. 多くの数学者がこの問題に取り組んできたが, 今回取り上げたい結果は, 2015 年に Haagerup と Musat によって得られた量子チャネルに関連した問題との同値性である.

定理 4.1 (Haagerup, Musat, 2015)**.** 以下の主張は同値である.
(1) Connes Embedding Problem は正しい.
(2) 全ての自然数 $n \geq 3$ と

$$Tx = (I_n \otimes \tau_{\mathcal{N}})(u^*(x \otimes 1_{\mathcal{N}})u), \qquad x \in M_n \tag{4.1}$$

(ただし, $\mathcal{N}$ はある von Neumann 環, $\tau_{\mathcal{N}}$ は $\mathcal{N}$ 上のある正規忠実トレース, $u \in M_n \otimes \mathcal{N}$ はあるユニタリ作用素) で表現されるすべての量子チャネル $T : M_n \to M_n$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} d_{cb}(T \otimes S_k, \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))) = 0 \tag{4.2}$$

が成立する.

関数 d_{cb} は **cb-ノルム** ($||T||_{cb} := \sup_{k\in\mathbb{N}} ||T \otimes I_k||$) から導かれる M_n 上線形写像全体の集合上の距離を指す. この定理の面白い点は, 一方は無限次元の問題である Connes Embedding Problem と (一部無限次元の可能性がある von Neumann 環を介してはいるが) 有限次元の量子チャネルの問題が同値であるということを主張している点である. さらに発展させて次のような問題が考えられる.

問題 4.2. 量子チャネル T が (4.1) と (4.2) が成立しているならば, ある自然数 k が存在し, $T \otimes S_k \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))$ は言えるか?

(4.1) において, $\mathcal{N} = M_k$, $\tau_{\mathcal{N}} = \mathrm{Tr}_k$ であれば**定理 3.1** から, **問題 4.2** が肯定的に言えることが解る. また行列環以外の場合にも次のような例もある (証明は [4] を参照).

定理 4.3. 有限次元 von Neumann 環 $\mathcal{N} \simeq M_{k_1} \oplus \cdots \oplus M_{k_d}$ と $\mathcal{N}$ 上のトレース

$$\tau_{\mathcal{N}}(x_1, \cdots, x_d) := \alpha_1 \mathrm{Tr}_{k_1}(x_1) + \cdots + \alpha_d \mathrm{Tr}_{k_d}(x_d), \qquad x_i \in M_{k_i}$$

(ただし $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ は正の有理数で $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ となる) とユニタリ作用素 $u \in M_n \otimes \mathcal{N}$ が存在して, 量子チャネル T が (4.1) と表現されるとき, ある自然数 L とユニタリ行列 $U \in M_n \otimes M_L$ が存在し,

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_L)(U^*(x \otimes 1_L)U), \qquad x \in M_n$$

が成立する.

定理 3.1 を用いれば, この場合の量子チャネルに関しても**問題 4.2** が肯定的に言えることがわかる. このようにいくつかの結果を用いて, 問題 4.2 が正しいかどうかを解決することが今後の課題となる.

謝辞

本研究は, 2016 年度京都大学スーパーグローバル大学創成支援事業「ジャパンゲートウェイ構想」 数学系ユニット (KTGU) による支援を受けています.

参考文献

[1] P. Benioff, The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines, Journal of Statistical Physics, 1980, Volume **22**, Issue 5, pp 563-591.

[2] U. Haagerup, M. Musat, Factorization and dilation problems for completely positive maps on von Neumann algebras. Comm. Math. Phys. **303** (2011), no. 2, 555-594.

[3] U. Haagerup, M. Musat, An asymptotic property of factorizable completely positive maps and the Connes embedding problem. Comm. Math. Phys. **338** (2015), no. 2, 721-752.

[4] Y. Ueda, On tensors of factorizable quantum channels with the completely depolarizing channel, Adv. Oper. Theory **3** (2018) no. 4, 807-815.

[5] 菊池慶一, 渡邉昇, 量子計算過程の量子チャネルによる定式化, 数理解析研究所講究録 **1066**, (1998) 87-94.