

非可換多様体上の $U(1)$ のインスタントンからのエルミート・ アインシュタイン計量を作る

原 健太郎 (東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻)

佐古 彰史 (東京理科大学理学部第二部数学科)

Hyun Seok Yang (Center for Quantum Spacetime, Sogang University, Seoul 04107, Korea)

概 要

我々は今回、局所的なエルミート・アインシュタイン計量が”Gravitational instantons from gauge theory,” H. S. Yang and M. Salizzoni, Phys. Rev. Lett. (2006) 201602, [hep-th/0512215] で紹介されている写像によって (反) 自己双対 2-形式から構成されることを示した。この方法は元々非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のゲージ理論についてのものであったが、今回に限っては可換空間上の (反) 自己双対 2-形式に対しても有効である。我々は今回 (反) 自己双対 2-形式の具体例として非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンを用いることでエルミート・アインシュタイン計量を構成している。またこのエルミート・アインシュタイン計量がケーラー計量になる条件はある 2-形式がビアンキ恒等式を満たすことである。

1 背景 (重力理論・リーマン幾何学)

Definition 1. (M, g) を (準) リーマン多様体とする。レビ・チビタ接続から定義されるリッチ曲率 $R_{\mu\nu}$ 、スカラー曲率 R が

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

を満たすとき (M, g) をアインシュタイン多様体という。また上記方程式を (真空の) アインシュタイン方程式と呼ぶ。

この方程式は一般相対性理論において最も重要な方程式である。ここにおいて (M, g) は時空であり、ブラックホール周りの粒子の挙動や宇宙膨張の歴史、重力レンズ効果、重力波などの宇宙物理学を記述する。

2 背景 (マクスウェル方程式・ゲージ理論)

対称行列全体の集合を $Alt_n(\mathbb{R})$ と表すこととする。つまり

$$Alt_n(\mathbb{R}) := \{F \in M_n(\mathbb{R}) \mid F^T = -F\}$$

と定義する。

Definition 2. 線形写像 $*$: $Alt_4(\mathbb{R}) \longrightarrow Alt_4(\mathbb{R})$ を以下で定義する。

$$* \left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{34} & -\hat{F}_{24} & \hat{F}_{23} \\ -\hat{F}_{34} & 0 & \hat{F}_{14} & -\hat{F}_{13} \\ \hat{F}_{24} & -\hat{F}_{14} & 0 & \hat{F}_{12} \\ -\hat{F}_{23} & \hat{F}_{13} & -\hat{F}_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

次に $\hat{F}$ を $\mathbb{R}^4$ 上の Alt_4 値関数 $\hat{F}(x)$ に格上げし、 $\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式

$$\hat{F}(x)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu, \quad \left(* \hat{F}(x) \right)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

を定義する。ここではアインシュタインの縮約記法を使っている。

$$\hat{F} := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、

$$d \left(\hat{F}_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0, d \left(\left(* \hat{F} \right)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0$$

を仮定すると、 E_μ を電場、 B_μ を磁場とするマクスウェル方程式が導出される。前者をビアンキ恒等式と言い、磁場に対するガウスの法則とファラデーの電磁誘導の法則を導く。後者をヤン・ミルズ方程式といい、電場に対するガウスの法則とアンペールの法則を導く。そこで $*\hat{F} = -\hat{F}$ となるような $\hat{F}$ をインスタントンという。

Fact 2.1. $\hat{F}$ がインスタントン条件とビアンキ恒等式を同時に満たすならば、その $\hat{F}$ はヤン・ミルズ方程式の解である。つまり

$$*\hat{F} = -\hat{F}, d \left(\hat{F}_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0 \implies d \left(\left(* \hat{F} \right)_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \right) = 0$$

が成立する。

3 先行研究

[1] においては [2] の結果に基づいて 4×4 反対称行列 $F, \hat{F}, \theta$ の各成分に対して以下のような関係式を与えている。

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{1 + F\theta} F \right)_{\mu\nu}$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ であり、

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}$$

である。また対称行列 G, g も

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + (F\theta)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu})$$

のように与える。するとつまりは

$$g_{\mu\nu} = \left(2 \left(E_4 + \hat{F}\theta \right)^{-1} - E_4 \right)_{\mu\nu}$$

ということになる。ただし E_4 は 4×4 単位行列であり $F, \hat{F}$ に関してはゲージ曲率、 g, G に関しては計量を想定している。

4 主結果

[1] においては F がビアンキ恒等式を満たし、 $\hat{F}$ が自己双対であるときの解の一つを用いた場合 g が江口ハンソン計量になることを示している。この計量はよく知られたケーラー・アインシュタイン計量の一例である。 F がビアンキ恒等式を満たすとき g がケーラー計量になることは知られていたが、新たに [4] において我々はこの結果の一般化として $\hat{F}$ が自己双対であるときは g がエルミート・アインシュタイン計量になることを示した。つまり

Lemma 4.1. 反対称行列 $\hat{F}^-, \theta \in M_4\mathbb{R}$ に対して対称行列 $g \in M_4\mathbb{R}$ を

$$g = \left(2 \left(E_4 + \hat{F}^- \theta \right)^{-1} - E_4 \right)$$

で定義する。ただし

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}$$

である。反対称行列 $\hat{F}^-$ を $\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式と思った時のホッジ作用素に対して

$$\star \hat{F}^- = -\hat{F}^-$$

を満たす場合

$$\det[g] = 1$$

となる。

Theorem 4.2. 局所的に $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視した場合、エルミート接続に対するリッチ曲率は

$$R_{\bar{j}k} = \partial_{\bar{j}} \partial_k \log(\det[g])$$

で計算される。つまり上記の条件 $\star \hat{F}^- = -\hat{F}^-$ のもとでは g が計量だとすると

$$R_{\bar{j}k} = 0$$

すなわちリッチ平坦・アインシュタイン計量を意味している。

ということを示した。自己双対である $\hat{F}$ の具体例としてはインスタントン解がよく知られており、非可換多様体上のインスタントン解については [3] において計算されている。このインスタントン解に対応するエルミート・アインシュタイン計量が [4] において計算されている。

参考文献

- [1] S. Lee, R. Roychowdhury and H. S. Yang, “Test of Emergent Gravity,” Phys. Rev. D **88** (2013) 086007 doi:10.1103/PhysRevD.88.086007 [arXiv:1211.0207 [hep-th]].
- [2] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” JHEP. **9** (1999) 032, [hep-th/9908142].

- [3] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, “Elongated $U(1)$ instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$,” JHEP **0111** (2001) 068 doi:10.1088/1126-6708/2001/11/068 [hep-th/0109111].
- [4] K. Hara, A. Sako and H. S. Yang, “Hermitian-Einstein metrics from noncommutative $U(1)$ instantons,” arXiv:1809.02328 [hep-th].