

A General Class of Exterior Differential Operators on Boson-fermion Fock Spaces in the Q-space Representation

Yuta Aihara

相原 祐太

北海道大学大学院理学研究院数学部門

1 序

ボソン・フェルミオンフォック空間上の無限次元外微分作用素の理論が [6,7,12] で展開された。そこで理論の基礎となるのは、フォック空間上の生成作用素と消滅作用素の理念であり、理論の展開は Malliavin calculus [14] におけるそれとは独立で、超対称的場の量子論や数論との関係も示され興味深い。また、この理論において、ある基本的なガウス型確率変数の多項式を係数に持つ微分形式の挙動については、多くのことが示され、既にそのような微分形式のクラスのための基礎は完成しているといつて良いだろう。そこで、問題となるのは、無限個のガウス型確率変数を持つようなより一般的な微分形式のクラスの挙動を解明することである。ところで、今述べた理論とは別に、[13,15] にあるようなフレッシュ微分の理念を用いた無限次元解析も展開され、実りある結果が得られている。しかし、彼らの関心は L^2 -理論を構築することにはなかったように見える。筆者は [4] において、フレッシュ微分の理念を用いて、[6,7,12] における無限次元解析の理論と整合し得る汎関数的方向微分作用素の L^2 -理論を研究し、この微分作用素について、上述の多項式を含むある一般的な汎関数のクラスに適用可能な部分積分公式を導出した。本報告の目的は、この部分積分公式を基礎にして、[6,7,12] における外微分作用素を包括するようなド・ラーム型のそれを構成することにある。

2 予備的知識

$\mathcal{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする。 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ で $\mathcal{H}$ の複素化を表す。 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上のボソソフック空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間 $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_s^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi^{(n)} \in \bigotimes_s^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|_{\bigotimes_s^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}^2 < \infty \right\},\end{aligned}$$

で定義する。ここで、 $\bigotimes_s^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ の n 重対称テンソル積である ($\bigotimes_s^0 \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}$)。 $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ における試験ベクトル f に付随するボソン消滅作用素を $a(f)$ で表す。作用素 $a(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり、その共役 $a(f)^*$ は次の形を取る：

$$(a(f)^*\psi)^{(0)} = 0, \quad (a(f)^*\psi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}), \quad n \geq 1, \quad \psi \in D(a(f)^*).$$

ここで、 S_n は $\bigotimes_s^n \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称化作用素を表す。作用素 $a(f)^*$ は試験ベクトル f に付随する生成作用素と呼ばれる。

A を $\mathcal{H}$ 上の真に正な自己共役作用素とする。 $\{\mathcal{H}_s(A)\}_{s \in \mathbb{R}}$ で A に付随するヒルベルトスケールを表す。このとき、すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して、 $\mathcal{H}_s(A)$ の双対空間 $\mathcal{H}_s(A)'$ は自然に $\mathcal{H}_{-s}(A)$ と同一視される。 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラスに属する作用素のなすイデアルを $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ で表す。 $\gamma > 0$ とし、次を仮定する。

仮定 1. $A^{-\gamma} \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$.

ヒルベルト空間 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} := \mathcal{H}_{\gamma}(A).$$

によって定義する。すると、次が成り立つ。

$$\mathcal{E}' = \mathcal{H}_{-\gamma}(A).$$

以下、集合 X に対して、写像 $F : \mathcal{E}' \rightarrow X$; $\phi \mapsto F(\phi)$ を単に $F(\phi)$ と書く。仮定1の下で、 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{E}'$ への埋め込みはヒルベルト・シュミット作用素である。ゆえに、ミンロスの定理によって、可測空間 $(\mathcal{E}', \mathcal{B})$ 上の確率測度であって、 σ -集合体 $\mathcal{B}$ が $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{E}\}$ で生成され、次の等式が成り立つものがただ一つ存在する。

$$\int_{\mathcal{E}'} e^{i\phi(f)} d\mu(\phi) = e^{-\|f\|_{\mathcal{H}}^2/4}, \quad f \in \mathcal{E}.$$

ここで、 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ のノルムを表す。

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$ に対して、 $:\phi(f_1) \cdots \phi(f_n):$ で確率変数 $\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)$ のウィック積を表す。ウィック積 $:\phi(f_1) \cdots \phi(f_n):$ は次の漸化式を満たす。

$$:\phi(f_1) := \phi(f_1),$$

$$\begin{aligned} : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : &= \phi(f_1) : \phi(f_2) \cdots \phi(f_n) : \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \langle f_1, f_j \rangle : \phi(f_2) \cdots \widehat{\phi(f_j)} \cdots \phi(f_n) : \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

ここで、 $\widehat{\phi(f_j)}$ は $\phi(f_j)$ を除くことを意味する。ベクトル $\Omega \in \mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\Omega := (1, 0, 0, \dots),$$

で定義する。ベクトル Ω は $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ におけるフォック真空と呼ばれる。次の事実はよく知られている（例えば、[11,16]）。

定理 2.1. 次を満たすボソンのフォック空間 $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(\mathcal{E}', d\mu)$ へのユニタリー作用素 U が一意的に存在する。

$$U\Omega = 1,$$

$$U(a(f_1)^* \cdots a(f_n)^* \Omega) = (\sqrt{2})^n : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) :, \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$$

定理 2.1 におけるユニタリー作用素 U はボソンのフォック空間の Q-空間表現といわれる。ここで構成された $L^2(\mathcal{E}', d\mu)$ を用いた研究として [1,2,6,7,8] がある。また、[9] の理論の無限自由度版はこの表現を用いて記述しうる。

$f \in \mathcal{H}$ に対して、作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := U \left(\frac{i}{\sqrt{2}} (a(f)^* - a(f)) \right) U^{-1}.$$

で定義する。すると、すべての $f \in \mathcal{H}$ に対して、 $\pi(f)$ は自己共役作用素になる。

すべての $\mathcal{H}$ に対して、 f 方向の汎関数的方向微分作用素と呼ばれる D_f を

$$D_f := i\pi(f) + \phi(f).$$

で定義する。すると、よく知られているように [11]、すべての $f \in \mathcal{H}$ に対して、 D_f は $L^2(Q, d\mu)$ 上の可閉線形作用素になる。この汎関数的方向微分作用素に対して、次の部分積分公式が成り立つ。

定理 2.2. [4] $g \in \mathcal{H}$ とする。このとき、すべての $F, G \in D(D_g)$ に対して、

$$\int_{\mathcal{E}'} (D_g F)(\phi) G(\phi) d\mu(\phi) = \int_{\mathcal{E}'} F(\phi) (2\phi(g) G(\phi) - (D_g G)(\phi)) d\mu(\phi). \quad (2.1)$$

ここで、 $L^2(\mathcal{E}', d\mu)$ の部分空間を導入する。

定義 2.3. [4] $g \in \mathcal{H}$ 、 F を $\mathcal{E}'$ 上の可測関数とする。 F がフレッシュェ微分可能で、すべての $\delta > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq \delta} |F(\phi + tg)| e^{\delta|\phi(g)|}, \quad \sup_{|t| \leq \delta} |F(\phi + tg)| \phi(g) e^{\delta|\phi(g)|} &\in L^2(\mathcal{E}', d\mu), \\ \sup_{|t| \leq \delta} |F'(\phi + tg)(g)| e^{\delta|\phi(g)|} &\in L^2(\mathcal{E}', d\mu). \end{aligned}$$

を満たすとき、 $F \in \mathcal{D}_g$ という。

すると、次の定理を得る。

定理 2.4. [4] $g \in \mathcal{H}$ とする。このとき、 $\mathcal{D}_g \subset D(\pi(g))$ が成り立つ。さらに、すべての $F \in \mathcal{D}_g$ に対して、

$$(D_g F)(\phi) = F'(\phi)(g), \quad \mu - a.e. \phi \in \mathcal{E}'. \quad (2.2)$$

定理 2.5. [4] $g \in \mathcal{H}$ とする。このとき、すべての $F, G \in \mathcal{D}_g$ に対して、

$$\int_{\mathcal{E}'} F'(\phi)(g) G(\phi) d\mu(\phi) = \int_{\mathcal{E}'} F(\phi) (2\phi(g) G(\phi) - G'(\phi)(g)) d\mu(\phi). \quad (2.3)$$

3 ボソン・フェルミオンフォック空間上のド・ラーム型外微分作用素の構成

すべての $p \in \mathbb{N}$ に対して、 $\mathcal{H}$ 上の連続 p -重線形形式のなすバナッハ空間を $B(\mathcal{H}^p)$ で表す。このとき、自然に $\otimes^p \mathcal{H} \subset B(\mathcal{H}^p)$ を得る ([5])。

定義 3.1. $p \geq 0$, F を $\mathcal{E}'$ から $\otimes^p \mathcal{H}$ への写像とする。 F が $B(\mathcal{H}^p)$ の位相に関して C^∞ 級で、すべての $l \geq 0$ と $\phi \in \mathcal{E}'$ に対して

$$F^{(l)}(\phi) \in (\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H}).$$

が成り立つとき、 F は強 C^∞ 級であるといわれる。

定義 3.2. $p, l \geq 0$, F を $\mathcal{E}'$ から $(\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H})$ への可測写像とする。 F がバナッハ空間 $B(\mathcal{H}^{l+p})$ の位相に関して微分可能で、すべての $\delta > 0$ と $g \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq \delta} \|F(\phi + tg)\|_{(\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H})} e^{\delta|\phi(g)|} &\in L^2(\mathcal{E}', d\mu), \\ \sup_{|t| \leq \delta} \|F(\phi + tg)\|_{(\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H})} \phi(g) e^{\delta|\phi(g)|} &\in L^2(\mathcal{E}', d\mu), \\ \sup_{|t| \leq \delta} \|F'(\phi + tg)(g)\|_{(\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H})} e^{\delta|\phi(g)|} &\in L^2(\mathcal{E}', d\mu). \end{aligned}$$

を満たすとき、 $F \in \mathcal{D}_{l,p}(\mathcal{E}')$ といわれる。

次の事実に注意する。

$$\mathcal{D}_{l,p}(\mathcal{E}') \subset L^2(\mathcal{E}', d\mu; (\otimes^l \mathcal{E}) \otimes (\otimes^p \mathcal{H})) \subset L^2(\mathcal{E}', d\mu; \otimes^{l+p} \mathcal{H}), \quad l, p \geq 0.$$

定義 3.3. $p \geq 0$, F を $\mathcal{E}'$ から $\otimes^p \mathcal{H}$ への写像とする。 F が強 C^∞ 級で、すべての $l \geq 0$ に対して、

$$F^{(l)} \in \mathcal{D}_{l,p}(\mathcal{E}')$$

を満たすとき、 $F \in C_p^\infty(\mathcal{E}')$ といわれる。

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 変数の多項式の全体を $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ で表す。 $L^2(\mathcal{E}', d\mu)$ の稠密な部分空間 $\mathcal{P}(\mathcal{E}')$ を

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}') := \{F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) | F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), f_j \in \mathcal{E}, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

によって定義する。すると、

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}') \subset C_0^\infty(\mathcal{E}')$$

が成り立つ。

S を $\mathcal{H}$ 上の閉線形作用素で、 $\mathcal{E}$ が $D(S)$ で S の作用素ノルムに関して稠密、 $S|_{\mathcal{E}}$ が連続なるものとする。 $p \geq 0$ とする。 $F \in C_p^\infty(\mathcal{E}')$ に対して、 $D_{S,p}F \in L^2(\mathcal{E}', d\mu; \otimes^{p+1} \mathcal{H})$ を

$$(D_{S,p}F)(\phi) := (S \otimes I)(F'(\phi)), \quad \phi \in \mathcal{E}', p \geq 1$$

$$(D_{S,0}F)(\phi) := S(F'(\phi)), \quad \phi \in \mathcal{E}'$$

によって定義する。すると、定理 2.5 により、[5] における手法と同様にして、 $D_{S,p}$ は $L^2(\mathcal{E}', d\mu; \otimes^p \mathcal{H})$ から $L^2(\mathcal{E}', d\mu; \otimes^{p+1} \mathcal{H})$ への稠密に定義された可閉線形作用素で、次の部分積分公式が成立することを証明できる。

定理 3.4. $p \geq 0$ とする。すべての $F \in C_p^\infty(\mathcal{E}')$, $G \in C_0^\infty(\mathcal{E}')$, $g_j \in D(S^*)$, $j = 1, \dots, p+1$ に対して、

$$\int_{\mathcal{E}'} \langle (D_{S,p}F)(\phi), G(\phi) \rangle_{\otimes^{p+1} \mathcal{H}}^{p+1} d\mu(\phi) = \int_{\mathcal{E}'} \langle F(\phi), (D_{S^*g_1}^*G)(\phi) \rangle_{\otimes^p \mathcal{H}}^{p+1} d\mu(\phi). \quad (3.1)$$

ここで、 $\otimes_{j=2}^1 g_j := 1$ とする。

さて、定理 3.4 の結果を反対称化することにより、ボソン・フェルミオンフォック空間上のド・ラーム型の外微分作用素を構成しよう。すべての $p \geq 0$ に対して、 $\wedge^p \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の反対称テンソル積、 A_p を $\otimes^p \mathcal{H}$ 上の反対称化作用素とする。 $\mathcal{H}$ 上のフェルミオンフォック空間を $\mathcal{F}_f(\mathcal{H})$ で表す。すると、ボソン・フェルミオンフォック空間 $L^2(\mathcal{E}', d\mu; \mathcal{F}_f(\mathcal{H}))$ について、次が成り立つ。

$$L^2(\mathcal{E}', d\mu; \mathcal{F}_f(\mathcal{H})) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} L^2(\mathcal{E}', d\mu; \wedge^p \mathcal{H}).$$

$L^2(\mathcal{E}', d\mu; \mathcal{F}_f(\mathcal{H}))$ の閉部分空間 L_p^2 を

$$L_p^2 := L^2(\mathcal{E}', d\mu; \wedge^p \mathcal{H})$$

によって定義する。

すべての $F \in C_p^\infty(\mathcal{E}') \cap L_p^2$ に対して、 $d_{S,p}F \in L_{p+1}^2$ を

$$(d_{S,p}F)(\phi) := \sqrt{p+1}A_{p+1}((D_{S,p}F)(\phi)), \quad \phi \in \mathcal{E}',$$

によって定義する。 $D(d_{S,p}) := C_p^\infty(\mathcal{E}') \cap L_p^2$.

$\mathcal{H}$ の代数的反対称テンソル積を $\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H}$ で表す。このとき、 $C_0^\infty(\mathcal{E}')$ と $\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H}$ の代数的テンソル積 $(C_0^\infty(\mathcal{E}')) \hat{\otimes} (\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H})$ について、

$$(C_0^\infty(\mathcal{E}')) \hat{\otimes} (\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H}) \subset D(d_{S,p})$$

が成り立つ。よって、線形作用素 $d_{S,p}$ は稠密に定義されている。

すべての $L_1 \in \wedge^p \mathcal{H}$, $L_2 \in \wedge^q \mathcal{H}$ に対し、 L_1 と L_2 の外積 $L_1 \wedge L_2 \in \wedge^{p+q} \mathcal{H}$ を

$$L_1 \wedge L_2 := \sqrt{\frac{(p+q)!}{p!q!}} A_{p+q}(L_1 \otimes L_2)$$

によって定義する。また、すべての $g_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \dots, p$ に対し、

$$\bigwedge_{j=1}^p g_j := g_1 \wedge \dots \wedge g_p = \sqrt{p!} A_p(\bigotimes_{j=1}^p g_j)$$

と定義する。具体的な微分形式に対する $d_{S,p}$ の作用については次が成り立つ。

命題 3.5. すべての $F \in C_0^\infty(\mathcal{E}')$ と $f_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \dots, p$ に対して、

$$d_{S,p}(F(\phi) \bigwedge_{j=1}^p f_j) = (d_{S,0}F)(\phi) \wedge (\bigwedge_{j=1}^p f_j), \quad \phi \in \mathcal{E}'. \quad (3.2)$$

定理 3.4 を応用することにより、 $d_{S,p}^*$ の具体的な微分形式に対する作用について次が得られる。

定理 3.6. すべての $p \geq 0$ に対して、

$$(C_0^\infty(\mathcal{E}')) \hat{\otimes} (\hat{\otimes}_a^{p+1} D(S^*)) \subset D(d_{S,p}^*).$$

さらに、すべての $G \in C_0^\infty(\mathcal{E}')$ と $g_j \in D(S^*)$, $j = 1, \dots, p+1$ に対して、

$$d_{S,p}^*(G(\phi) \bigwedge_{j=1}^{p+1} g_j) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} (D_{S^*g_j}^* G)(\phi) g_1 \wedge \dots \wedge \widehat{g_j} \wedge \dots \wedge g_{p+1} \quad (3.3)$$

定理 3.6 により、 $D(d_{S,p}^*)$ は L_{p+1}^2 で稠密であるから、 $d_{S,p}$ は可閉である。以下、 $\overline{d_{S,p}}$ も単に $d_{S,p}$ と書く。

ガウス型確率変数の多項式に対する $d_{S,0}$ の作用は以下の形をとる。

命題 3.7. $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f_j \in D(S)$, $j = 1, \dots, n$ とする。このとき、

$$d_{S,0}(P(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n))) = \sum_{j=1}^n (\partial_j P)(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) S f_j, \quad \text{in } L^2 - \text{sense.} \quad (3.4)$$

命題 3.7 により、[6,7,12] において導入された外微分作用素は $\overline{d_{S,p}|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}') \hat{\otimes} (\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H})}}$ であることが分かる。以下、 $\overline{d_{S,p}|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}') \hat{\otimes} (\hat{\otimes}_a^p \mathcal{H})}}$ を $(d_{\mathcal{D}})_{S,p}$ と書く。すると、

$$(d_{\mathcal{D}})_{S,p} \subset d_{S,p}$$

が成り立つ。自己共役作用素 S^*S のボソンフォック空間 $L^2(\mathcal{E}', d\mu)$ における第 2 量子化作用素を $d\Gamma_b(S^*S)$, 自己共役作用素 SS^* のフェルミオンフォック空間 $\mathcal{F}_f(\mathcal{H})$ における第 2 量子化作用素を $d\Gamma_f(SS^*)$ と書く。作用素 $d\Gamma_f^{(p)}(SS^*)$ を

$$d\Gamma_f^{(p)}(SS^*) := d\Gamma_f(SS^*)|_{D(d\Gamma_f(SS^*)) \cap (\wedge^p \mathcal{H})}$$

によって定義する。このとき、[7] によって得られた次の定理が再発見される。 $d_{S,-1} := 0$, $(d_{\mathcal{D}})_{S,-1} := 0$ と定義する。

定理 3.8. すべての $p \geq 0$ に対して、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} & 2(d\Gamma_b(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_f^{(p)}(SS^*)) \\ &= (d_{\mathcal{D}})_{S,p}^* (d_{\mathcal{D}})_{S,p} + (d_{\mathcal{D}})_{S,p-1} (d_{\mathcal{D}})_{S,p-1}^* \\ &= d_{S,p}^* d_{S,p} + d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*. \end{aligned} \quad (3.5)$$

等式 (3.5) を踏まえ、作用素付きの無限次元ラプラシアン $\Delta_{S,p}$ を

$$\Delta_{S,p} := d_{S,p}^* d_{S,p} + d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*$$

によって定義する。最も単純な例として、 $\gamma = 2$, $S = A^{\frac{1}{2}}$ の場合を考えることができる。

さて、次を証明できる。

命題 3.9. すべての $p \geq 0$ に対して、次が成立する。

(1) $D(d_{S,p-1})$ 上で、

$$d_{S,p} d_{S,p-1} = 0. \quad (3.6)$$

(2)

$$\overline{\text{Ran}(d_{S,p-1})} \perp \overline{\text{Ran}(d_{S,p}^*)}. \quad (3.7)$$

命題 3.9 により、ここでフレッシュ微分の理念を援用し構成した外微分作用素 $\{d_{S,p}\}_{p \geq 0}$ に対しても、次のド・ラーム-ホッジ-小平型の分解定理が成立することが分かる。

定理 3.10. すべての $p \geq 0$ に対して、

$$L_p^2 = \overline{\text{Ran}(d_{S,p-1})} \oplus \overline{\text{Ran}(d_{S,p}^*)} \oplus \text{Ker}(\Delta_{S,p}). \quad (3.8)$$

なお、詳細は省略せざるをえないが、ここで展開された実理論は、すべての複素ヒルベルト空間は実ヒルベルト空間の複素化であるという事実をここで現れるヒルベルト空間に対して顕在化することにより、 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に適合した形式で展開できる。また、[3] における複素外微分作用素の取り扱いも、ここで述べた理論を複素化することでより包括的なものに改良し得る。

参考文献

- [1] Y. Aihara, Semi-classical asymptotics in an abstract Bose field model, *IJPAM* **85** (2013), 265-284.
- [2] Y. Aihara, Semi-classical asymptotic expansions up to any finite orders of the partition function of an abstract Bose field model, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*. **19** (2016), 1650028 (16 pages).
- [3] Y. Aihara, A functional directional derivative in infinite dimensional spaces and its application to $\bar{\partial}$ -equations, *J. Math. Anal. Appl.* **464** (2018), no.1, 231-246.
- [4] Y. Aihara, Integration by parts formulae for a general class of functions in Boson Fock spaces, *Hokkaido Univ. Preprint Series*. **1115** (2018).
- [5] Y. Aihara, On Closability of Differential Operators Acting in Vector-valued L^2 -functions in Fock Spaces, *Hokkaido University Preprint Series* (2018).
- [6] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.* **82** (1989), 330-369.
- [7] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index, *J. Functional Analysis*, **105** (1992), 342-408.
- [8] A. Arai, Trace formulas, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 510-546.
- [9] A. Arai, Functional integral representations and Golden-Thompson inequalities in Boson-Fermion systems, *Rev. Math. Phys.* **25** (2013), no.8.
- [10] 新井朝雄, フォック空間と量子場, 日本評論社, 2000.

- [11] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, 2010.
- [12] A. Arai and I. Mitoma, De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in ∞ -dimensions, *Math. Ann.* **291** (1991), 51-73.
- [13] J.F. Colombeau, “Differential Calculus and Holomorphy,” North-Holland, 1982.
- [14] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer, 1997.
- [15] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, 1986.
- [16] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton University Press, 1974.