# Kac-Paljutkin Quantum Group as a Quantum Subgroup of $SU_{-1}(2)$

お茶の水女子大学 大学院人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学領域
北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)

**概要**

Kac-Paljutkin の量子群は，非可換かつ非余可換な 8 次元 Hopf 環として 1960 年代に導入された. 本講演では Kac-Paljutkin の量子群が $SU_{-1}(2)$ の部分量子群であることを示す. 特に，Hopf 環の graded twist を用いることで Hopf 環の間の準同型写像を導く. また，Kac-Paljutkin の量子群の表現圏が，Klein の 4 元群に由来する丹原・山上によるテンソル圏と圏同値であることを利用する.

## 1　コンパクト量子群

Banach 環が，C*-条件 $\|T^*T\| = \|T\|^2$ をみたすような $*$-演算 $T \mapsto T^*$ を持つとき，C*-環という. 作用素環論において重要な定理のひとつである Gelfand–Naimark の定理によると，可換な単位的 C*-環はあるコンパクト位相空間上の連続関数環と同型になる. このことから，一般の作用素環は "非可換な" コンパクト位相空間上の連続関数環とみなされる. そのような研究対象に "群構造" を与えるのが，Woronowicz によるコンパクト量子群の理論 [4] である。

**定義.** コンパクト量子群とは，単位的 C*-環 $A$ と,（余積と呼ばれる）単位的 $*$-準同型写像 $\Delta\colon A \to A \otimes A$ の組で，以下をみたすもののことである.

1. $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
2. $(A \otimes 1)\Delta(A) = \{\ (a \otimes 1)\Delta(b) \mid a, b \in A\ \}$, $(1 \otimes A)\Delta(A) = \{\ (1 \otimes a)\Delta(b) \mid a, b \in A\ \}$ は $A \otimes A$ で稠密である.

**例.** 通常のコンパクト群 $G$ に対して，$C(G)$ を $G$ 上の複素数値連続関数からなる C*-環とする. このとき，$*$-準同型写像 $\Delta\colon C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ を，可換 C*-環 $C(G)$ のテンソル積 $C(G) \otimes C(G)$ は $C(G \times G)$ とみなせることに注意して，以下のように定める.

$$\Delta(f)(g, h) = f(gh) \quad (\forall f \in C(G),\ \forall g, h \in G)$$

すると，$(C(G), \Delta)$ はコンパクト量子群である.

**例.** 実数 $q \in [-1, 1]$, $q \neq 0$ に対し，コンパクト量子群 $SU_q(2)$ は以下のように定める. $C(SU_q(2))$

を，$\alpha, \gamma$ で生成される普遍的な単位的 C*-環とする．生成元 $\alpha, \gamma$ は以下の条件をみたす．

$$(u^q_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \text{がユニタリ．}$$

この関係式を書き下すと，

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1,\ \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = 1\,\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*,\ \alpha\gamma = q\gamma\alpha,\ \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha$$

となる．余積 $\Delta\colon C(SU_q(2)) \to C(SU_q(2)) \otimes C(SU_q(2))$ は以下の式で定める．

$$\Delta(u^q_{ij}) = \sum_k u^q_{ik} \otimes u^q_{kj}$$

生成元 $\alpha, \gamma$ を当てはめると，

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,\ \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$

である．

特に $q = 1$ のとき，$C(SU_1(2))$ は $C(SU(2))$ と同型である．

**例．** 整数 $n \geq 2$ について $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $F\bar{F} = I_n$ をみたす行列とする．ただし $\bar{F}$ は $F$ の各成分の複素共役をとって得られる行列を表す．この $F$ に対し，自由直交群 $O^+_F$ は以下のように定める．$C(O^+_F)$ を $u_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ で生成される 普遍的な C*-環とする．生成元 $u_{ij}$ は以下の関係をみたす．

$$U = (u_{ij})^n_{i,j=1}\text{がユニタリ，かつ } U = FU^cF^{-1}$$

ただし $U^c = (u^*_{ij})_{i,j}$ である．余積は次の式で定める．

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$$

行列 $F$ が単位行列 $I_n$ のとき自由直交群を $O^+_n$ と表し，これは直交群の定義式から可換性を除いたものとなる．

量子群 $SU_q(2)$ は，この自由直交群の例としてもみることができる．行列 $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を次のようにとればよい．

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{sgn}(q)|q|^{\frac{1}{2}} \\ |q|^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**定義．** コンパクト量子群 $G$ の，有限次元ベクトル空間 $H$ への表現とは，可逆な $U \in B(H) \otimes C(G)$ で

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(U) = U_{12}U_{13} \quad \in B(H) \otimes C(G) \otimes C(G)$$

をみたすものである．空間 $H$ が Hilbert 空間かつ $U$ がユニタリ作用素のとき，ユニタリ表現と呼ばれる．

## 2 Kac-Paljutkin の Hopf 環

Hopf 環 $C(G_{\mathrm{KP}})$ は, 非可換かつ非余可換な, 半単純な Hopf 環の最小の例として Kac と Paljutkin によって導入された [2].

**定義.** Kac-Paljutkin の Hopf 環 とは，8 次元の単位的 $*$-環

$$C(G_{\mathrm{KP}}) = \mathbb{C}\cdot\epsilon \oplus \mathbb{C}\cdot\alpha \oplus \mathbb{C}\cdot\beta \oplus \mathbb{C}\cdot\gamma \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

と余積 $\Delta$ の組からなる Hopf $*$-環である. ここで，$\epsilon, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ射影を表す. これらの射影と行列 $x \in M_2(\mathbb{C})$ に対し余積は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}
\Delta(\epsilon) &= \epsilon\otimes\epsilon + \alpha\otimes\alpha + \beta\otimes\beta + \gamma\otimes\gamma + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} \epsilon_{ij}\otimes\epsilon_{ij},\\
\Delta(\alpha) &= \epsilon\otimes\alpha + \alpha\otimes\epsilon + \beta\otimes\gamma + \gamma\otimes\beta\\
&\qquad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{22} + i\epsilon_{12}\otimes\epsilon_{21} - i\epsilon_{21}\otimes\epsilon_{12} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{11}),\\
\Delta(\beta) &= \epsilon\otimes\beta + \beta\otimes\epsilon + \alpha\otimes\gamma + \gamma\otimes\alpha\\
&\qquad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{22} - i\epsilon_{12}\otimes\epsilon_{21} + i\epsilon_{21}\otimes\epsilon_{12} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{11}),\\
\Delta(\gamma) &= \epsilon\otimes\gamma + \gamma\otimes\epsilon + \alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha\\
&\qquad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{11} - \epsilon_{12}\otimes\epsilon_{12} - \epsilon_{21}\otimes\epsilon_{21} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{22}),\\
\Delta(x) &= \epsilon\otimes x + \alpha\otimes u_\alpha x u_\alpha^* + \beta\otimes u_\beta x u_\beta^* + \gamma\otimes u_\gamma x u_\gamma^*\\
&\qquad + x\otimes\epsilon + \overline{u}_\alpha x \overline{u}_\alpha^*\otimes\alpha + \overline{u}_\beta x \overline{u}_\beta^*\otimes\beta + \overline{u}_\gamma x \overline{u}_\gamma^*\otimes\gamma,
\end{aligned}$$

ただし，$\epsilon_{ij}$ は $M_2(\mathbb{C})$ における行列単位を表し，

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ u_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ i & 0\end{pmatrix},\ u_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である.

**定理.** Hopf $*$-環 $C(SU_{-1}(2))$ から $C(G_{\mathrm{KP}})$ への全射な単位的 $*$-準同型写像が存在する.

定理の主張から，$C(G_{\mathrm{KP}})$ が定める量子群は $SU_{-1}(2)$ の部分量子群である. 証明の方針として，Hopf $*$-環の間の準同型写像を構成するために，Hopf 環への群作用から定まる Hopf 環の graded twisting [1] を用いる. また，量子群 $G_{KP}$ の有限次元ユニタリ表現から定める表現圏 $\mathrm{Rep}(G_{\mathrm{KP}})$ は，丹原・山上のテンソル圏 [3] のうち Klein の 4 元群から構成されるもののひとつと圏同値となる.

## 参考文献

[1] Julien Bichon, Sergey Neshveyev, and Makoto Yamashita. Twist gradué des catégories et des groupes quantiques par des actions des groupes. *Ann. Inst. Fourier*, 66(6):2299–2338, 2016.

[2] G. I. Kac and V. G. Paljutkin. Finite ring groups. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 15:224–261, 1966.

[3] Daisuke Tambara and Shigeru Yamagami. Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *Journal of Algebra*, 209(2):692 – 707, 1998.

[4] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.*, 111:613–665, 1987.