

薄膜コーティング問題における固有値の漸近挙動について

東北大学大学院 情報科学研究科 システム情報科学専攻
谷地村 敏明 (Toshiaki YACHIMURA)

1 導入

本講演では、以下のディリクレ境界条件における二相固有値問題 (P_ε) を考える：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Q_\varepsilon \nabla \Phi) = \lambda \Phi & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ を有界領域とし、その境界 Γ は十分滑らかで連結であるとする。また、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して領域 Σ_ε を

$$\Sigma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \xi + \tau \nu_\Gamma(\xi), \xi \in \Gamma, 0 < \tau < \varepsilon\}$$

とし、領域 Ω_ε を $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup \Sigma_\varepsilon \cup \Gamma$ とする。ここで ν_Γ は Γ における外向き単位法線ベクトルである。さらに、固有値問題 (P_ε) の係数である $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon(x)$ は以下の区分的定数関数であるとする。

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ \sigma_\varepsilon, & x \in \Sigma_\varepsilon. \end{cases}$$

以下では、 σ_ε を $\sigma_\varepsilon = \alpha\varepsilon$ とし、 α は正の実数であるとする (図 1)。

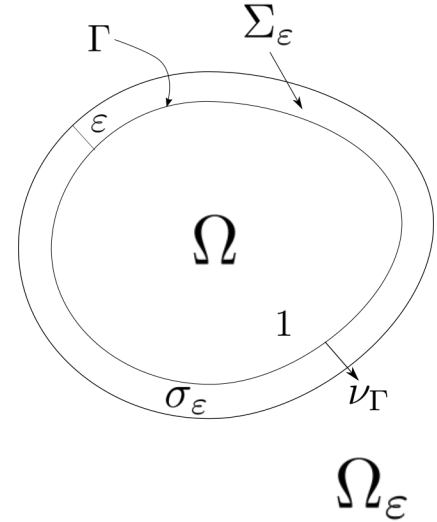


図 1 問題設定

さて、固有値問題 (P_ε) の第一固有値を $\lambda_1(\varepsilon)$ とし、対応する第一固有関数を Φ_ε とする。以下では、第一固有関数は $\|\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$ と正規化し、 $\Phi_\varepsilon > 0$ を考える。本問題は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき領域が摂動すると共に、係数が薄膜領域 Σ_ε において退化する係数の特異摂動固有値問題である。本研究の目的は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした際の第一固有値の漸近挙動について明らかにすることである。特に、領域 Ω の幾何学的形状が第一固有値の漸近挙動に対してどのような影響を及ぼすかについて考察する。

2 先行研究

領域の摂動を伴う固有値問題は、Courant–Hilbert のラプラス作用素 (つまり均質媒質) に関する先駆的研究 [2] 以来、スペクトル理論やスペクトル幾何学において重要な課題であり多くの先行研究が存在する (e.g. ダンベル型領域 [1, 4, 5], 小さな穴を持つ領域 [9, 11], 薄膜領域 [7, 8, 12]). 一方主要

部の係数が区分的な定数関数である場合の楕円型作用素 (複合媒質) の固有値問題は二相固有値問題と呼ばれ、係数の自由度と領域の摂動との関係からラプラス作用素の場合では現れない性質が現れることが知られている (e.g. [6, 10, 13]). 特に問題 (P_ε) のような係数の退化と領域の摂動を伴う二相固有値問題は Friedman [3] によって考察された. これはある弾性体を非常に柔らかい物体でコーティングした際に振動数がどのように変化するかを考察したものであり、コーティング問題や補強問題と呼ばれている.

Friedman は境界条件における比較原理等を用いることにより、以下の定理を示した.

定理 2.1 (Friedman [3]). $\lambda_1(\varepsilon)$ を固有値問題 (P_ε) の第一固有値とする. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varepsilon) &= \mu_1 + o(1) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \Phi_\varepsilon &\rightarrow w_1 \text{ weakly in } H^2(\Omega),\end{aligned}$$

ここで μ_1 は以下のロバン固有値問題の第一固有値であり、 w_1 は $\|w_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ と正規した対応する第一固有関数である:

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{in } \Omega, \\ \alpha w + \frac{\partial w}{\partial \nu_\Gamma} = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

この結果から、薄膜領域の厚さと係数のオーダーが等しい場合は境界条件に影響を与え、ディリクレ境界条件における二相固有値問題 (P_ε) の第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ はロバン境界条件におけるラプラス作用素の第一固有値 μ_1 に収束することがわかる.

3 主定理について

第一固有値の漸近挙動に対する領域の収束先 Ω の幾何学的形状の影響を解析するためには、薄膜領域における第一固有関数の詳細な評価を必要とする. このような第一固有関数の評価と薄膜領域におけるリーマン計量の摂動公式といった幾何学的な評価を min-max 原理を用いた変分的手法によって組み合わせることで、固有値のより詳細な漸近挙動を求めることができる. 以下が本研究における主定理である.

定理 3.1 ([14]). $\lambda_1(\varepsilon)$ を固有値問題 (P_ε) の第一固有値とする. このとき以下が成り立つ.

$$\lambda_1(\varepsilon) = \mu_1 - \varepsilon \int_\Gamma \left(\alpha H + \frac{\mu_1}{3} \right) w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + o(\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0,$$

ここで H は境界 Γ における主曲率の和として定義される平均曲率である.

この定理から固有値の漸近挙動に対して、領域 Ω の幾何学的形状に関連して平均曲率が現れ、この効果は $\alpha > 0$ でなければ現れないことがわかる.

4 主定理の証明のアイデア

以下では、主結果の証明の方針と概略について述べる. 証明の大まかな方針としては、まず第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ がロバン第一固有値 μ_1 に $O(\varepsilon)$ のオーダーで収束することを示す. 次に、得られた固有

値の評価を用いることで固有関数のよりよい評価を導出する．特に薄膜領域における接方向に対する勾配評価を導く．そして、接方向に対する勾配評価の他に H^2 評価や伝送条件等と以下のヤコビアン
の漸近挙動

$$\sqrt{G(\xi, \tau)} = \sqrt{G_0}(1 - H(\xi)\tau) + O(\tau^2) \text{ as } \tau \rightarrow 0$$

を用いることにより、主定理を示すことができる．以下では特に第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ がロバン第一固有値 μ_1 に $O(\varepsilon)$ のオーダーで収束することについて詳述する．

4.1 上からの評価

固有値の上からの評価を導く．固有値を変分的に特徴付ける min-max 原理から、

$$\lambda_1(\varepsilon) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx}.$$

min-max 原理から、適当なテスト関数を代入すれば固有値の上からの評価が得られる．まず、ロバン第一固有関数を薄膜領域において境界の値で拡張することを考える．また、以下のような関数を用意する．

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega, \\ 1 - \frac{\tau}{\varepsilon} & \text{in } \bar{\Sigma}_\varepsilon. \end{cases}$$

テスト関数として $\tilde{u} = w_1 \phi$ と取れば、

$$\lambda_1(\varepsilon) \leq \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{u}|^2 dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla w_1|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla(w\phi)|^2 dx}{\int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \int_{\Sigma_\varepsilon} |w_1 \phi|^2 dx}.$$

ロバン第一固有関数の正規化と薄膜領域の体積が $O(\varepsilon)$ であることから、

$$\int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \int_{\Sigma_\varepsilon} |w_1 \phi|^2 dx = 1 + O(\varepsilon).$$

また、 $\nabla w_1 \cdot \nabla \phi = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla(w_1 \phi)|^2 dx &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} (\phi^2 |\nabla w_1|^2 + 2 \nabla w_1 \cdot \nabla \phi + w_1^2 |\nabla \phi|^2) dx \\ &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi^2 |\nabla w_1|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla \phi|^2 dx \\ &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla \phi|^2 dx + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

ここで $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nu_\Gamma = -\nu_\Gamma/\varepsilon$ であり、ヤコビアン J の漸近挙動を用いることで

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla\phi|^2 dx &= \alpha\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_\Gamma w_1(\xi)^2 \cdot \left| \frac{-\nu_\Gamma}{\varepsilon} \right|^2 \sqrt{G_\tau} d\xi d\tau \\ &= \alpha\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \int_\Gamma w_1(\xi)^2 (1 + O(1)\tau) \sqrt{G_0} d\xi d\tau \\ &= \alpha \int_\Gamma w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

を得る。よってこれらを合わせると、固有値の上からの評価が得られる。

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varepsilon) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla\tilde{u}|^2 dx}{\int_\Omega |\tilde{u}|^2 dx} \\ &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx + \alpha \int_\Gamma w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + C\varepsilon}{1 - C\varepsilon} \leq \mu_1 + C\varepsilon.\end{aligned}$$

4.2 下からの評価

次に固有値の下からの評価を示す。固有値問題 (P_ε) の弱形式は

$$\int_\Omega \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dx = \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

である。この弱形式を評価することによって固有値の下からの評価を得ることができる。まずはじめに、固有値の下からの評価を導出するために必要な、固有関数に関する H^1 評価と H^2 評価について述べる。

補題 4.1. 第一固有関数 Φ_ε は以下の評価を満たす。

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\Phi_\varepsilon|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla\Phi_\varepsilon|^2 dx &\leq C, \\ \int_\Omega |D^2\Phi_\varepsilon|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |D^2\Phi_\varepsilon|^2 dx &\leq C,\end{aligned}$$

ここで C は ε に依存しない正の定数である。

証明は固有値の上からの評価と境界評価によるものである。

上からの評価と同様にテスト関数を構成する。任意の $\zeta \in C^1(\overline{\Omega})$ を取り、薄膜領域 Σ_ε において ζ を境界での値で拡張する。弱形式のテスト関数として $\varphi = \zeta\phi$ と取れば

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\zeta dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\zeta dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \zeta \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\phi dx \\ = \lambda_1(\varepsilon) \int_\Omega \Phi_\varepsilon \zeta dx + \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \zeta dx.\end{aligned}$$

それぞれの項を評価する．左辺の第二項目は第一固有関数の H^1 評価と $\zeta \in C^1(\overline{\Omega})$ であることから

$$\begin{aligned} \left| \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta \, dx \right| &\leq \int_{\Sigma_\varepsilon} \left| \sigma_\varepsilon^{1/2} \nabla \Phi_\varepsilon \right| \cdot \left| \sigma_\varepsilon^{1/2} \nabla \zeta \right| \, dx \\ &\leq \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \zeta|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

次に右辺の第二項目を評価する．固有値の上からの評価から，

$$\begin{aligned} \left| \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi \zeta \, dx \right| &\leq C \int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon| |\zeta| \, dx \\ &\leq C \left(\int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_\varepsilon} |\zeta|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

ここで，ディリクレ境界条件から

$$\Phi_\varepsilon(\xi, \tau) = - \int_\tau^\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \tau} \, ds$$

が成り立つ．この等式から，

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon|^2 \, dx \leq \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \tau} \right|^2 \, ds \right) \, dx \leq C\varepsilon \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \, dx \right)$$

が得られるので，

$$\left| \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi \zeta \, dx \right| \leq C\varepsilon$$

となる．左辺の第三項目に関しては，上からの評価と全く同様にして，

$$\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \zeta \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \phi \, dx = \alpha \int_\Gamma \Phi_\varepsilon \zeta \sqrt{G_0} \, d\xi + O(\varepsilon)$$

となるので，全体としては

$$\int_\Omega \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta \, dx + \alpha \int_\Gamma \Phi_\varepsilon \zeta \sqrt{G_0} \, d\xi = \lambda_1(\varepsilon) \int_\Omega \Phi_\varepsilon \zeta \, dx + O(\varepsilon)$$

が得られる．

固有値の下からの評価をするために，第一固有関数 Φ_ε を以下のロバン固有値問題の固有関数で固有関数展開することを考える．

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{in } \Omega, \\ \alpha w + \frac{\partial w}{\partial \nu_\Gamma} = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

ここで $\{\mu_k\}_{k \geq 1}$ は $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \rightarrow +\infty$ と番号づけられたロバン固有値であり, $\{w_k\}_{k \geq 1}$ は対応する正規化された固有関数である. さて, Φ_ε を以下のように固有関数展開する.

$$\Phi_\varepsilon = \sum_{k \geq 1} c_k(\varepsilon) w_k, \quad c_k = \int_{\Omega} \Phi_\varepsilon w_k dx.$$

テスト関数として $\zeta = c_1 w_1$ と取り, 固有関数の直交性を用いることにより,

$$(c_1)^2 \mu = \lambda_1(\varepsilon) (c_1)^2 + O(\varepsilon)$$

が得られる. よって固有値の下からの評価を示すためには, 以下の補題を示せばよい.

補題 4.2. 以下の評価が成り立つ.

$$c_1(\varepsilon) = 1 + o(1) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

証明の概略は以下の通りである. まず Ω における H^1 有界性からレリッヒの定理より, 固有関数の収束先 $\hat{\Phi}$ が捕まる. また, 固有値の上からの評価と単純性から, $\hat{\Phi}$ がロバン第一固有関数であることが示される. したがってレリッヒの定理から得られる L^2 強収束性より, 補題の主張が得られる.

以上より固有値の下からの評価が得られるので, 上からの評価と合わせることで固有値の漸近挙動

$$\lambda_1(\varepsilon) = \mu_1 + O(\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0$$

を得ることができる.

5 主定理について

主定理の証明に関しては, まず固有値の評価を用いることにより, 薄膜領域における固有関数のより詳細な評価を導く. 特に以下の二つの評価式に関する補題は, 薄膜領域における固有関数の挙動を解析するために必要不可欠なものである.

補題 5.1. 第一固有関数 Φ_ε は以下の評価を満たす.

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla_{tan} \Phi_\varepsilon|^2 dx &= O(\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \left\| \Phi_{in,\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi_{in,\varepsilon}}{\partial \nu_\Gamma} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= O(\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ここで $\Phi_{in,\varepsilon}$ は第一固有関数 Φ_ε の領域 Ω における制限である.

下からの評価と同様なテスト関数を取ることで,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \zeta \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \phi dx \\ = \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Omega} \Phi_\varepsilon \phi \zeta dx + \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi \zeta dx \end{aligned}$$

が得られる. これを上記の評価式や伝送条件, H^2 評価, そして薄膜領域におけるヤコビアン of の漸近挙動を組み合わせることで評価することにより, 本研究の主定理を得ることができる.

参考文献

- [1] J. Arrieta, Rates of eigenvalues on a dumbbell domain. Simple eigenvalue case, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3503–3531.
- [2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical physics*, Vol I, Wiley Interscience, New York, 1953.
- [3] A. Friedman, Reinforcement of the principal eigenvalue of an elliptic operator, *Arch. Rational Mech. Anal.* **73** (1980), no.1, 1–17.
- [4] S. Jimbo, Perturbation formula of eigenvalues in a singularly perturbed domain, *J. Math. Soc. Japan* **42** (1993), 339–356.
- [5] S. Jimbo, S. Kosugi, Spectra of domains with partial degeneration, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **16** (2009), 269–414.
- [6] S. Jimbo, S. Kosugi, Approximation of eigenvalues of elliptic operators with discontinuous coefficients, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), 1303–1323.
- [7] S. Jimbo, K. Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian with the mixed boundary condition and its application, *Indiana Univ. Math. J.* **63** (2016), 867–898.
- [8] D. Krejčířík, N. Raymond, M. Tušek, The magnetic Laplacian in shrinking tubular neighborhoods of hypersurfaces, *J. Geo. Anal.* **25** (2015), 2546–2564.
- [9] S. Ozawa, Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, *Duke Math. J.* **48** (1981), 767–778.
- [10] G.P. Panasenko, Asymptotics of the solutions and eigenvalues of elliptic equations with strongly varying coefficients, *Soviet Math. Dokl.* **21** (1980), 942–947.
- [11] J. Rauch, M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, *J. Funct. Anal.* **18** (1975), 27–59.
- [12] M. Schatzman, On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions, *Appl. Anal.* **61** (1996), No.3–4, 293–306.
- [13] T. Yachimura, Two-phase eigenvalue problem on thin domains with Neumann boundary condition, *Diff. Integ. Eq.* **31** (2018), 735–760.
- [14] T. Yachimura, Asymptotic behavior for the principal eigenvalue of a reinforcement problem, *Applicable Analysis*, (2018), DOI: 10.1080/00036811.2018.1517411.