

L^2 boundedness of solutions to the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻

中村憲史 (Kenji Nakamura)

概要

本講演では, Navier-Stokes 方程式及び双曲型 Navier-Stokes 方程式の 2 次元初期値問題について, 初期値のクラスを L^1 として解の $L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ 有界性が得られることを示す. これは, 既存の減衰評価から直接得られる結果ではなく, Hardy 空間を用いることにより得られる結果である. なお, 本研究は小林孝行氏 (大阪大学), 三沢正史氏 (熊本大学) との共同研究に基づく

1 導入

一般に, 水などの非圧縮性粘性流体の運動は次の Navier-Stokes 方程式で記述される:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = \text{Div } 2S & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (\text{NS})$$

ここで, 未知関数 $u = u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$, $\pi = \pi(t, x)$ はそれぞれ流速, 圧力を表す. また, 初期値 $u_0(x)$ は既知関数であり, 非圧縮条件 $\nabla \cdot u_0 = 0$ を満たすものとする. t は時間変数, $x = (x_1, x_2)$ は空間変数を表し,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \partial_j^k = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \quad (j = 1, 2, k \in \mathbb{N}), \quad \partial_j = \partial_j^1, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

とする. さらに, 2 次元ベクトル値関数 $v = (v_1, v_2)$ 及びスカラー関数 f に対して

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\partial_1 f, \partial_2 f), \quad \nabla v = (\nabla v_1, \nabla v_2), \quad \Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2), \\ \nabla \cdot v &= \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2, \quad (v \cdot \nabla)v = (v_1 \partial_1 v_1 + v_2 \partial_2 v_1, v_1 \partial_1 v_2 + v_2 \partial_2 v_2) \end{aligned}$$

とする. なお, 変形テンソル $S = (S_{j,k})_{j,k=1}^2$ は

$$S_{jk} = \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)$$

で与えられ, これを Fourier の法則という. ただし, $\mu > 0$ は流体の粘性係数を表す. テンソルに対する発散は $\text{Div } S = (\sum_{j=1}^2 \partial_j S_{j,k})_{k=1}^2$ で定義され, 非圧縮条件 $\nabla \cdot u = 0$ から $\text{Div } 2S = \mu \Delta u$ が従い,

次を得る:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (\text{PNS})$$

一方, 変形テンソルに時間遅れを入れた $S(t + \tau, x)$ の Taylor 級数展開において $\tau \rightarrow +0$ とすれば

$$\begin{aligned} S_{jk}(t + \tau, x) &= S_{jk}(t, x) + \tau S_{jk}(t, x) + \cdots \\ &= \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $S(t + \tau, x)$ の Taylor 級数展開において, その 1 次近似は

$$S + \tau \partial_t S = \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)_{j,k=1}^n$$

であり, これを Cattaneo の法則という. (NS) の第一式に $1 + \tau \partial_t$ を施して Cattaneo の法則を適用すれば, 非圧縮条件 $\nabla \cdot u = 0$ から $\text{Div } 2(S + \tau \partial_t S) = \mu \Delta u$ が従い, 次の双曲型 Navier-Stokes 方程式を得る:

$$\begin{cases} \tau \partial_t^2 u - \mu \Delta u + \partial_t u + (1 + \tau \partial_t) \nabla \pi = -(1 + \tau \partial_t)((u \cdot \nabla)u) & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (\text{HNS})$$

Navier-Stokes 方程式は, フランスの技術者 C.L.M.H. Navier により導出され, S.D. Poisson, B.de Saint Venant ら数理物理学者の考察を経て, 最終的に G.G. Stokes により (PNS) の形にまとめられた. 数学的な解析は, J. Leray によって始められて以降数多くの研究がなされてきたが, 未だに 3 次元初期値問題に対する適切性が示されておらず, ミレニアム問題としても有名である.

一方, 双曲型 Navier-Stokes 方程式の数学解析は Racke, Saal[11, 12] により始められ, 彼らは全空間における時間局所解及び小さな初期値に対する時間大域解の一意存在を示した.

以下, L^p ($1 \leq p \leq \infty$), H^m ($m \in \mathbb{N}$) などは通常 Lebesgue 空間, Hilbert 空間などを表し, L_σ^2 は L^2 で非圧縮条件を満たすクラスとする.

2 2次元初期値問題における解の L^2 有界性

まず, 本節で重要な役割を果たす Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ を定義しておく.

定義 2.1. $n \geq 2$ とする. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} |\phi_r * f(x)| dx < \infty$$

となるクラスを Hardy 空間という. ここで, $\phi_r(x) = r^{-n} \phi(r^{-1}x)$ であり, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\text{supp } \phi \subset B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ を満たすものとする.

2次元線型熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

において、初期値が $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{8\pi} \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx \right|^2$$

が成り立つ ([4]). したがって、熱方程式 (2.1) の解に対して、一般に次の評価は成り立たない:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq C \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

しかし、線型熱方程式及び線型消散波動方程式において、初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ より狭い空間である Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ とすれば、次の評価を得られる ([4], [7], [10]):

$$\int_0^\infty \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq C \|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Ogawa, Shimizu[10] において、彼らは (2.1) の解 u に対して次を示した:

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq C \|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

このとき、2次元における埋め込み $W^{1,1} \subset L^2$ 及び $\mathcal{H}^1 \subset L^1$ から

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds &\leq C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds \\ &\leq C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds \\ &\leq C \|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

となることがわかる.

Navier-Stokes 方程式の初期値問題については、Leray[5], Hopf[3] により弱解の存在が示された. また、Masuda[6] は $t \rightarrow \infty$ のとき、弱解の $L^2(\mathbb{R}^2)$ ノルムが 0 に収束することを示した. その後、Wiegner[13] は初期値が $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のとき、例えば次の弱解に対する減衰評価を得た:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Miyakawa[8, 9] は、Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ での Stokes 方程式及び Navier-Stokes の考察を行った. そして、初期値が $u_0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ のとき $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^1)$ となることや、 $\|\nabla u(t)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} = O(t^{-1/2})$ as $t \rightarrow \infty$ などの減衰評価を導出した.

双曲型 Navier-Stokes 方程式の初期値問題については、Racke, Saal[11, 12] による以下の時間局所解及び時間大域解に関する結果が知られている.

定理 2.2. (Racke, Saal[11]) $n \geq 2$, $m > n/2$ とする. 初期値が

$$(u_0, u_1) \in (H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \times H^{m+1}(\mathbb{R}^n)) \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)$$

を満たすとき、(HNS) の時間局所解 (u, π) が一意に存在し、

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, T], H^m(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], H^{m+1}(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, T], H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)), \\ (1 + \tau \partial_t) \nabla \pi &\in C^0([0, T], H^m(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

となる．ここで、存在時刻 $T > 0$ は

$$T > \frac{1}{1 + C(\|u_0\|_{H^{m+2}} + \|u_1\|_{H^{m+1}})}$$

を満たし、 $C > 0$ は m と n にのみ依存する定数である．

定理 2.3. (Racke, Saal[12]) $m_1 \geq 3, m \geq m_1 + 9, 4 < q < \infty, 1/q + 1/p = 1$ とする．ある $\varepsilon > 0$ が存在し、

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^{m+2} \times H^{m+1}} + \|(u_0, u_1)\|_{L^1} + \|(u_0, u_1)\|_{W^{m_1+6,p} \times W^{m_1+5,p}} < \varepsilon$$

のとき、(HNS) の時間大域解 (u, π) が一意に存在し、

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, \infty), H^m(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty), H^{m+1}(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, \infty), H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)), \\ (1 + \tau \partial_t) \nabla \pi &\in C^0([0, \infty), H^m(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

となる．さらに、 T に依らない定数 $M_0 > 0$ が存在し、次を満たす：

$$M(T) \leq M_0.$$

ただし、

$$\begin{aligned} M(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} \Big\{ & (1+t)^{1-\frac{2}{q}} \|u(t)\|_{W^{m_1,q}} + (1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{q}} \|(\partial_t u(t), \nabla u(t))\|_{W^{m_1,q}} \\ & + (1+t)^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{H^m} + (1+t) \|(\partial_t u(t), \nabla u(t))\|_{H^m} \Big\}. \end{aligned}$$

注意 2.1. 定理 2.3 から特に、 $t > 0$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \|(\partial_t u(t), \nabla u(t), \partial_t \nabla u(t))\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1}$$

が成り立ち、 $C > 0$ は t に依らない定数である．

我々は、(2.2) や注意 2.1 からは直接得ることができない $L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ 有界性を、Hardy 空間を用いることで導出した．なお、非圧縮条件により、初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ とすることができた．

定理 2.4. $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, (u, π) を (PNS) の $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上弱解とする．すなわち、 $u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$, $\pi \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ であり、 (u, π) は (PNS) を超関数の意味で満たすとする．このとき

$$\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq C$$

が成り立ち、 $C > 0$ は t に依らない定数である．

定理 2.5. $n = 2$, u を定理 2.2 及び定理 2.3 で得られる $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上 (HNS) の解とする．このとき

$$\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq C$$

が成り立ち、 $C > 0$ は t に依らない定数である．

3 証明の概要

我々の証明はエネルギー法を基盤とし, Hardy 空間と有界平均振動 (bounded mean oscillation (BMO)) のクラスが双対であることを示す, Fefferman-Stein の不等式を用いることがポイントである. この方法を 2 次元外部領域における熱方程式及び消散波動方程式に適用した結果として [4, 7] が挙げられるが, 大きな違いとして非圧縮条件の存在がある. 我々は特に次の補題を用いることで, 初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ とすることができた.

補題 3.1. ([1]) $n \geq 2$ とする. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\nabla \cdot f = 0$ のとき, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0$ であり

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f g dx \right| \leq C \|f\|_{L^1} \|\nabla g\|_{L^n}$$

が任意の $g \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ. ここで, C は n にのみ依存する定数である.

なお, 非線型項の評価には次の補題を用いる.

補題 3.2. ([2]) $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla \cdot u = 0$ のとき $(u \cdot \nabla)u \in \mathcal{H}^1$ となり, 次の評価が成り立つ.

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

参考文献

- [1] C. Amrouche, H. H. Nguyen, New estimates for the div-curl-grad operators and elliptic problems with L^1 -data in the whole space and in the half-space, J. Differential Equations, **250** (2011), 3150–3195.
- [2] R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, J. Math. Pures et Appl. **72** (1993), 247–286.
- [3] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. **4** (1951), 213–231.
- [4] T. Kobayashi, M. Misawa, L^2 boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations, RIMS Kôkyûroku, **B42** (2013), 1–11.
- [5] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. **63** (1934), 193–248.
- [6] K. Masuda, Weak solutions of Navier-Stokes equations, Tôhoku Math. **36** (1984), 623–646.
- [7] M. Misawa, S. Okamura, T. Kobayashi, Decay property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations, **24** (2011), 941–964.
- [8] T. Miyakawa, Hardy spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations, Kyushu J. Math. **50** (1996), 1–64.
- [9] T. Miyakawa, Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in $\mathbf{R}^n$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 383–434.

- [10] T. Ogawa, S. Shimizu, The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space, *J. Funct. Anal.* **255** (2008), 1107–1138.
- [11] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I: Local well-posedness, *Evol. Equ. Control Theory*, **1** (2012), 195–215.
- [12] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations II: Global existence of small solutions, *Evol. Equ. Control Theory*, **1** (2012), 217–234.
- [13] M. Wiegner, Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^n$, *J. London. Math. Soc.* **35** (1987), 303–313.