空間非一様な係数を持つ Schnakenberg モデルの対称な多重ピーク定常解の安定性解析

首都大学東京 大学院理学研究科 数理科学専攻
石井裕太 (Yuta ISHII)

1　導入

様々な化学現象及び生命現象におけるパターン形成のメカニズムの解析の中で, 1952 年の A. Turing による拡散誘導不安定性の提言に基づいたパターン形成の数学理論の発展は目覚ましい. 現在までにいくつかの数理モデルに対して数多くの数学解析が行われてるが, 例えば, 生物の形態形成に関する Gierer-Meinhardt 系や微生物と化学物質との走化性相互作用を記述した Chemotaxis 系, 化学現象に関する Gray-Scott 系や Schnakenberg 系などの時空パターンや定常パターンの安定性に関する解析だけでも, 多くの研究結果が得られており, 今なお活発に詳細な解析が進められている. こうした背景の下, 本研究では次に述べる Schnakenberg モデルの定常パターンの存在と安定性に関する厳密な数学解析を行っている.

Schnakenberg モデルは自己触媒反応を記述した化学反応モデルである. 本研究では, 以下の空間非一様な係数を持つ Schnakenberg モデルの定常解 (定常パターン) について考える [2, 3].

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} = d\varepsilon - u + g(x)u^2 v, & x \in (-1,1),\ t>0, \\ \varepsilon v_t - D v_{xx} = \frac{1}{2} - \frac{c}{\varepsilon} g(x) u^2 v, & x \in (-1,1),\ t>0, \\ u_x(\pm 1) = v_x(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, D, d, $c > 0$ は ε に無関係な定数で, $g(x)$ は与えられた正値関数である. また, $u(x,t)$ と $v(x,t)$ は時刻 t, 位置 x における生成物の濃度を表し, $\varepsilon^2 > 0$ と $D > 0$ は, それぞれ u と v の拡散係数である. 係数 $g(x)$ は反応速度を表しており, 温度などの影響により, 位置 $x \in (-1,1)$ によって反応速度が変化すると考えられる. 従って, 特に (1.1) は反応速度が場所により異なる数理モデルとなる. ここで, 方程式 (1.1) と元の Schnakenberg モデルの関係について述べる. まず, 元の Schnakenberg モデルは次で与えられる [1].

$$\begin{cases} U_t - D_1 U_{xx} = a - U + g(x)U^2 V, & x \in (-1,1),\ t>0, \\ V_t - D_2 V_{xx} = b - g(x)U^2 V, & x \in (-1,1),\ t>0, \\ U_x(\pm 1) = V_x(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

このとき, (1.1) は次のスケール変換によって得られる.

$$U = \frac{1}{2b\varepsilon}u, \quad V = 2b\varepsilon v, \quad D_1 = \varepsilon^2, \quad D_2 = \frac{D}{\varepsilon}, \quad c = \frac{1}{4b^2}, \quad d = ac^{-\frac{1}{2}} = 2ab. \tag{1.3}$$

ここでは, 特に $\varepsilon > 0$ は十分小さいとして扱う. これは (1.1) において, 拡散係数の比 $\frac{D}{\varepsilon^2}$ を大きくし, u と比べて v の反応を速くすることを意味する.

本研究では, 次で定義される各点 x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ でピークを持つ対称な定常解 (対称な N-ピーク解) の安定性について議論する.

$$x_j := -1 + \frac{2j-1}{N}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.4}$$

また, 本研究では, $g(x) > 0$ が次を満たす場合を考える.

$$g \in C^3(-1,1), \quad g(x) = g(-x), \quad g(x) = g(x + \frac{2}{N}). \tag{1.5}$$

このとき, $g(x)$ の対称性と周期性より次が分かる.

$$g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_N) =: \xi_1, \tag{1.6}$$

$$g''(x_1) = g''(x_2) = \cdots = g''(x_N) =: \xi_2. \tag{1.7}$$

本研究の目的は, (1.5) を満たす対称かつ周期を持った $g(x)$ に対する対称な N-ピーク解の安定性の解析であり, 特に $g(x)$ による解の安定性への影響を明確に解明することである.

主結果を述べるための記号を準備する. まず, いくつかの関数を導入する. w_0 を次の方程式の解とする.

$$\begin{cases} w_0'' - w_0 + w_0^2 = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ w_0 > 0, \ w_0(0) = \max_{\mathbb{R}} w_0, \ \lim_{|y|\to\infty} w_0(y) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

このとき, w_0 は一意的で $w_0(y) = \frac{3}{2}(\cosh\frac{y}{2})^{-2}$ と書けることや $\int_{\mathbb{R}} w_0^2(y)dy = 6$ となることが知られている. w を次の方程式の解とする.

$$\begin{cases} w'' - w + \xi_1 w^2 = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ w > 0, \ w(0) = \max_{\mathbb{R}} w, \ \lim_{|y|\to\infty} w(y) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

このとき, w は (1.8) の解 w_0 を用いて, $w(y) = \xi_1^{-1} w_0(y)$ と書ける. χ は以下を満たすカットオフ関数とする.

$$\chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ , \ 0 \le \chi_N \le 1\ , \ \chi_N(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{4N}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2N}. \end{cases}$$

$I := (-1,1)$ とし, 関数空間 $H_p^2(I)$ を次のように定義する.

$$H_p^2(I) := \left\{ \eta \in H^2(I) \;\middle|\; \eta(x) = \eta(-x), \eta(x) = \eta(x + \frac{2}{N}), \eta'(x_j \pm \frac{1}{N}) = 0, j = 1, 2, \ldots, N \right\}. \tag{1.10}$$

$I_a := (-a^{-1}, a^{-1})$ $(a > 0)$ とし, スケール変換のための記号を関数 $\eta : (-1,1) \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\overline{u}(y) := u(\varepsilon y), \quad y \in I_\varepsilon$$

で定義する.

2　主結果

(1.1) の定常問題は次の通りである.

$$
\begin{cases}
-\varepsilon^2 u'' = d\varepsilon - u + g(x)u^2 v, & x \in (-1,1), \\
-Dv'' = \frac{1}{2} - \frac{c}{\varepsilon} g(x)u^2 v, & x \in (-1,1), \\
u'(\pm 1) = v'(\pm 1) = 0.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

まず, N-ピーク解の存在に関する結果を述べる.

定理 2.1（[**2**]）　$D < +\infty$ を任意に固定する. また, $N \geq 1$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たすとする. このとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, (2.1) は対称な N-ピーク解 $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) \in H_p^2(I) \times H_p^2(I)$ を持ち, $u_\varepsilon(x)$ は $x = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ に集中する. 更に, $u_\varepsilon(x)$ は

$$
u_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{N} w_{\varepsilon,j}(x) + \phi_\varepsilon(x)
\tag{2.2}
$$

で与えられる. ここで,

$$
w_{\varepsilon,j}(x) := \frac{1}{\xi_0} w\Big(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\Big)\chi_N(x - x_j), \quad \xi_0 := cN\xi_1 \int_{\mathbb{R}} w^2(y)dy
\tag{2.3}
$$

で定義され, $\phi_\varepsilon(x)$ は剰余項, つまり $\phi_\varepsilon \in H_p^2(I)$ で, $\varepsilon > 0$ に依存しないある定数に対して

$$
||\overline{\phi_\varepsilon}||_{H^2(I_\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon}
\tag{2.4}
$$

を満たす. 次に, 各 x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ で $v_\varepsilon(x)$

$$
v_\varepsilon(x_j) = \xi_0 + O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ as } \varepsilon \to 0
\tag{2.5}
$$

を満たす. 更に, ある弱極限 $v_0 \in H^1(I)$ が存在して $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$ weakly in $H^1(I)$ で v_0 は次を満たす.

$$
\begin{cases}
-Dv_0''(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_j(x), & x \in (-1,1), \\
v_0(x_j) = \xi_0, \quad v_0'(\pm 1) = 0.
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

ここで, $\delta_j(x)$ は Dirac のデルタ関数であり, $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して $\langle \delta_j, \varphi \rangle = \varphi(x_j)$ を満たす.

次に, 定理 2.1で与えられた解 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ の安定性について考える. 方程式 (1.1) を $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ で線形化すると次の固有値問題を得る.

$$
\begin{cases}
\varepsilon^2 \varphi_\varepsilon'' - \varphi_\varepsilon + 2gu_\varepsilon v_\varepsilon \varphi_\varepsilon + gu_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, & x \in (-1,1), \\
D\psi_\varepsilon'' - \frac{2c}{\varepsilon} gu_\varepsilon v_\varepsilon \varphi_\varepsilon - \frac{c}{\varepsilon} gu_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon = \varepsilon \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, & x \in (-1,1), \\
\varphi_\varepsilon'(\pm 1) = \psi_\varepsilon'(\pm 1) = 0,
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

ここで, λ_ε は固有値で, $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \neq (0,0)$ は固有関数である. まず, 1-ピーク解の安定性について, [3] で得られた結果を紹介する .

定理 2.2（[**3**]）　$D < +\infty$ を任意に固定し, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとする. また, $N = 1$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たす関数とし, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は定理 2.1 の解とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $g''(0) \leq 0$ のとき, 任意の $D < +\infty$ で $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は安定となる.

(2) $g''(0) > 0$ のとき, $D < D_1$ であれば, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は安定となり, $D > D_1$ であれば, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は不安定となる. ただし, $D_1 > 0$ は次で与えられる定数である.

$$D_1 := \frac{1}{2c\int_{\mathbb{R}} w_0^2} \cdot \frac{g(0)^2}{g''(0)} = \frac{\xi_1^2}{12c\xi_2}. \tag{2.8}$$

また, $\varepsilon \to 0$ での λ_ε の漸近挙動は次で与えられる.

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{\int_{\mathbb{R}} w^3}{\int_{\mathbb{R}} (w')^2} \Big(-\frac{g(0)}{6D\xi_0} + \frac{g''(0)}{3} \Big) + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}). \tag{2.9}$$

$g(x) = 1$ かつ $d = 0$ の場合は研究は Iron-Wei-Winter [1] によって行われており, 特に, 対称な 1-ピーク解は任意の $D < +\infty$ に対して安定となることが知られている. $g(x) = 1$ の場合と比較して, 定理 2.2 は空間非一様な係数 $g(x)$ が対称な 1-ピーク解の安定性に強く影響を与えること意味する. 定理 2.2 を N-ピーク解へ拡張させた結果が, 本研究によって得られた次の定理である.

定理 2.3 ([2]) $D < +\infty$ を任意に固定し, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとする. また, $N \geq 2$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たす関数とし, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は定理 2.1 の解とする. 更に. D_N^1 と $D_N^2(0)$ を次のように定義する.

$$D_N^1 := \frac{\xi_1}{cN^3 \int_{\mathbb{R}} w_0^2 dy (1 + \cos(\frac{\pi}{N}))}, \tag{2.10}$$

$$D_N^2(0) := \frac{\xi_1}{2cN^3 \int_{\mathbb{R}} w_0^2 dy} = \frac{\xi_1}{12cN^3}. \tag{2.11}$$

このとき, 次が成り立つ.

(1) $\xi_2 > 0$ のとき, $0 < D_N^2 < D_N^2(0)$ を満たすある D_N^2 が存在して, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は $D < D_N^2$ 安定となり, $D > D_N^2$ で不安定となる.

(2) $\xi_2 \leq 0$ のとき, $D_N^2(0) \leq D_N^2 < D_N^1$ を満たすある D_N^2 が存在して, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は $D < D_N^2$ で安定, $D > D_N^2$ で不安定となる.

$g(x) = 1$ の場合は $D_N^2 = D_N^2(0)$ であり, ピークの個数が安定性へ影響を与えることが [1] で既に知られている. $g(x) = 1$ の場合と比較すると, 定理 2.3 は各 x_j の近くで $g(x)$ が上に凸な関数であればより D の安定領域が増え, 下に凸に関数であればより D の不安定領域が増えることを述べている. 本研究の解析では, $g(x) = 1$ の場合の解 u_ε と $\lambda_\varepsilon = o(1)$ に対する剰余項の評価を [1] よりも厳密に行うことに成功した. 定理 2.1 は [3] における 1-ピーク解の構成に関する結果から容易に導かれる. 定理 2.2 と定理 2.3 の証明は [1] と同じ方針で行うが, 本研究では証明で必要となる重要な評価式を全て明らかにした [2, 3].

参考文献

[1] D. Iron, J. Wei, M. Winter, Stability analysis of Turing patterns generated by the Schnakenberg model, J. Math. Biol. 49, 358—390 (2004)

[2] Y. Ishii, Stability of multi-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with periodic heterogeneity, preprint (2018)

[3] Y. Ishii, K. Kurata, Existence and stability of one-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with heterogeneity, Discrete Contin. Dyn. Syst., to appear.